

**ACT3250- Théorie du risque**  
**Baccalauréat en actuariat - Département de**  
**Mathématiques**

*Ces notes de cours ont été construites notamment à partir du livre de S.A. Klugman, H.H. Panjer et G.E. Willmot Loss Models : from data to décisions, third edition (Wiley, 2008), du livre de R. L. McDonalds Derivatives Markets et des notes de cours de Manuel Morales [http ://www.dms.umontreal.ca/~morales/risk.php](http://www.dms.umontreal.ca/~morales/risk.php)*

Hélène Guérin  
IRMAR, Université Rennes 1  
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex FRANCE.  
[helene.guerin@univ-rennes1.fr](mailto:helene.guerin@univ-rennes1.fr)

Décembre 2012.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction, lois de probabilité</b>	<b>5</b>
1.1	Objectifs . . . . .	5
1.2	Modèles de fréquence et de sévérité . . . . .	6
1.3	Quelques lois discrètes (fréquence) . . . . .	7
1.3.1	Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ , avec $\lambda > 0$ . . . . .	7
1.3.2	Binomiale $\mathcal{B}(m, q)$ . . . . .	8
1.3.3	Géométrique $\mathcal{G}(\beta)$ . . . . .	8
1.3.4	Binomiale négative $\mathcal{BN}(r, \beta)$ . . . . .	8
1.3.5	La famille $(a, b, 0)$ . . . . .	9
1.4	Familles de lois continues . . . . .	10
1.5	Étude des queues (ailes) . . . . .	11
1.6	Créer de nouvelles lois . . . . .	13
1.6.1	Lois mélanges (ou mixtures) . . . . .	13
1.6.2	Transformations de lois . . . . .	14
1.6.3	Inverse Gaussienne . . . . .	14
1.6.4	Hyperboliques Généralisées . . . . .	16
1.7	Loi du maximum . . . . .	17
1.7.1	Lois sous-exponentielles . . . . .	17
1.7.2	Théorème de Fisher-Tippet . . . . .	18
1.7.3	Comparaison de $S_n$ et $M_n$ . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Les modèles agrégés des pertes</b>	<b>21</b>
2.1	Les modèles . . . . .	21
2.2	Choix de modèles . . . . .	22
2.2.1	Pour la sévérité . . . . .	23
2.2.2	Pour la fréquence . . . . .	23
2.2.3	Pour les pertes agrégées . . . . .	24
2.3	Loi de $S_N$ en fonction de la loi de $X$ et de $N$ . . . . .	24
2.3.1	Fonction de répartition et densité de $S_N$ . . . . .	24
2.3.2	Fonction génératrice des moments de $S_N$ . . . . .	27
2.3.3	Moments de $S_N$ . . . . .	27
2.3.4	Cas particulier : variables de Poisson composé . . . . .	28
2.4	Prime Stop-Loss . . . . .	31
2.5	Résultats analytiques : calculs explicites et approximations de la loi de $S_N$ . . . . .	34
2.5.1	Lois fermées pour la convolution . . . . .	34
2.5.2	Méthode d'inversion . . . . .	35
2.5.3	Algorithme de Panjer pour calculer la loi de $S_N$ pour des sévérités discrètes . . . . .	35

2.5.4	Généralisation de l'algorithme de Panjer à des sévérités continues . . . . .	39
2.6	Influence de la police d'assurance sur les pertes agrégées . . . . .	43
2.6.1	Nombre et montant des paiements . . . . .	43
2.6.2	Paiements effectifs . . . . .	44
2.7	Quelques mots à propos du modèle individuel . . . . .	45
2.8	Quelques exercices . . . . .	47
2.8.1	Propriétés et étude de $S_N$ . . . . .	47
2.8.2	Prime Stop-Loss . . . . .	48
2.8.3	Calcul de la loi de $S_N$ . . . . .	49
2.8.4	Algorithme de Panjer . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Probabilité de ruine</b> . . . . .	<b>51</b>
3.1	Introduction . . . . .	51
3.2	Quelques rappels sur les processus . . . . .	51
3.3	Premiers modèles en assurance . . . . .	53
3.3.1	Modélisation du surplus . . . . .	53
3.3.2	Probabilité de ruine . . . . .	53
3.4	Probabilité de ruine en temps discret à horizon fini . . . . .	54
3.5	Théorie de la ruine en temps continu . . . . .	58
3.5.1	Estimation de la probabilité de ruine . . . . .	59
3.5.2	Coefficient d'ajustement de Lundberg . . . . .	60
3.5.3	Estimation du coefficient de Lundberg . . . . .	62
3.5.4	Déficit au moment de la ruine et probabilité de ruine . . . . .	63
3.5.5	Perte cumulée maximale . . . . .	67
3.5.6	Valeur asymptotique de la probabilité de ruine . . . . .	69
3.6	Approximation du surplus en temps continu par un mouvement brownien . . . . .	71
3.6.1	Approximation par le mouvement brownien . . . . .	71
3.6.2	Probabilité de ruine pour un mouvement brownien . . . . .	72
3.7	Approximation par simulation de la probabilité de ruine . . . . .	74
3.7.1	Simulation d'un processus de Poisson . . . . .	74
3.7.2	Simulation d'un processus de Poisson composé . . . . .	76
3.7.3	Simulation du surplus . . . . .	77
3.7.4	Calcul approché de la probabilité de ruine . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Modèles pour les actifs financiers et mesures de risque</b> . . . . .	<b>81</b>
4.1	Modèles en finance . . . . .	81
4.1.1	Premier Modèle : modèle sans saut . . . . .	81
4.1.2	Second modèle : modèle avec sauts . . . . .	84
4.2	Mesures de risque . . . . .	88
4.3	VaR : Value at Risk . . . . .	89
4.3.1	Utilisation en assurance . . . . .	89
4.3.2	Utilisation en finance . . . . .	90
4.4	Tail-Value (ou Conditional Tail Expectation) . . . . .	91
4.4.1	Utilisation en assurance . . . . .	92
4.4.2	Utilisation en finance . . . . .	93
4.5	Mesures par distorsion . . . . .	95

# Chapitre 1

## Introduction, lois de probabilité

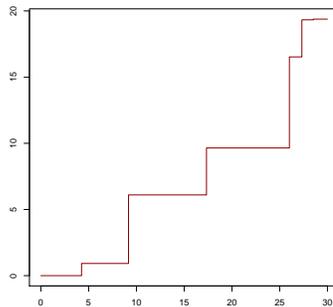
### 1.1 Objectifs

On va étudier dans ce cours plusieurs modèles et techniques pour quantifier les risques financiers et en assurance. Voici les modèles que l'on va introduire.

En assurance :

- le modèle agrégé : On note  $N_t$  le nombre de réclamations/sinistres dans l'intervalle de temps  $[0, t]$ ,  $X_i$  le montant de la  $i^{\text{ème}}$  réclamation et  $S_t$  le montant total des réclamations sur l'intervalle de temps  $[0, t]$ . On a alors

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

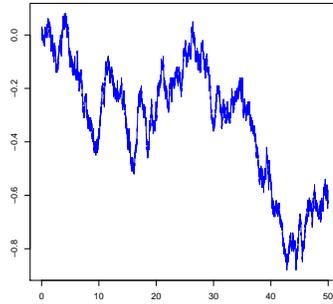


- les mesures de risque
  - Calcul de la probabilité de ruine d'une compagnie d'assurance
  - Mesures de risque : VAR, CTE

En ACT 2284, vous avez déjà étudié les modèles de fréquence ( $N_t$ ) et les modèles de sévérité ( $X_i$ ).

En finance :

- modèles pour les actifs financiers :
  - Mouvement brownien



- Modèles avec sauts
- Mesures du risque : VAR (value at risk), CTE (conditional tail expectation).

Le logiciel R sera utilisé tout le long du cours pour faire des simulations. Vous pouvez le télécharger sur la page <http://cran.r-project.org/>

Par ailleurs, sous l'onglet *Contributed* du site du CRAN, vous trouverez de nombreux manuels d'utilisation de R au format pdf. Parmi les manuels en français, il y a

- *R pour les débutants* by Emmanuel Paradis, the French version of *R for Beginners*.
- *Introduction à la programmation en R, Troisième édition* by Vincent Goulet, an introduction to programming in R.

## 1.2 Modèles de fréquence et de sévérité

On tire de l'expérience d'une compagnie des bases de données, avec lesquelles on construit des modèles de fréquence et/ou de sévérité. Le but est en général de choisir un modèle statistique pour décrire les observations et pouvoir faire des prévisions.

Les points importants dans l'analyse exploratoire de données pour faire la sélection de modèle :

- Moyenne  $\mu$ , écart-type  $\sigma$ , médiane et les modes
- Dissymétrie (skewness)  $\beta = \mathbb{E}[(\frac{X-\mu}{\sigma})^3]$ .  
Si  $\beta > 0$ , la distribution est décalée à gauche de la moyenne et donc une queue de distribution étalée vers la droite.  
Si  $\beta < 0$ , la distribution est décalée à droite de la moyenne et donc une queue de distribution étalée vers la gauche.  
Si  $\beta = 0$ , la distribution est symétrique par rapport à sa moyenne.
- Aplatissement (kurtosis)  $k = \mathbb{E}[(\frac{X-\mu}{\sigma})^4]$ .  
Si  $k = 3$ , les queues sont gaussiennes.  
Si  $k > 3$ , les queues sont plus épaisses que les queues gaussiennes (valeurs extrêmes assez fréquentes)  
Si  $k < 3$ , les queues sont sous-gaussiennes, plus plates que les queues gaussiennes (valeurs extrêmes rares).
- Limited expected value

$$Lev(u) = \mathbb{E}[X \wedge u], \quad \text{où } x \wedge y = \min(x, y).$$

- Mean excess loss ou Mean residual life

$$e_X(d) = \mathbb{E}[X - d | X > d] = \frac{1}{1 - F_X(d)} (\mathbb{E}[X] - Lev(d)),$$

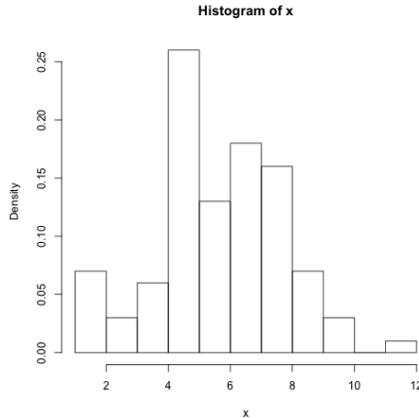
où  $F$  est la fonction de répartition de  $X$ .

— Histogramme et/ou Log-histogramme

Pour construire un histogramme, on définit des intervalles  $(0, c_1], (c_1, c_2], \dots, (c_{m-1}, c_m]$ . L'histogramme est alors défini de la façon suivante : pour  $x \in (c_{i-1}, c_i]$ ,  $i = 1, \dots, m$

$$\tilde{f}_n(x) = \frac{n_i}{n(c_i - c_{i-1})}$$

où  $n_i$  est le nombre d'observations dans  $(c_{i-1}, c_i]$  et  $n$  les nombre total d'observations.



Si on veut tracer un Log-histogramme, il suffit alors de considérer

$$\tilde{f}'_n(x) = \ln(\tilde{f}_n(x)) \quad \text{pour } x \in (c_{i-1}, c_i].$$

— analyse sur les données log-transformées.

On peut aussi grâce à ces données faire de la sélection modèle :

- Estimation des paramètres par la méthode des moments, la méthode du maximum de vraisemblance, les méthodes de minimalisation des distances ou les méthodes robustes.
- Estimation par intervalle de confiance en utilisant le maximum de vraisemblance.
- Tests d'évaluation des modèles : test de Kolmogorov-Smirnov, test du khi-deux, test de Anderson-Darling,...

## 1.3 Quelques lois discrètes (fréquence)

### 1.3.1 Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ , avec $\lambda > 0$

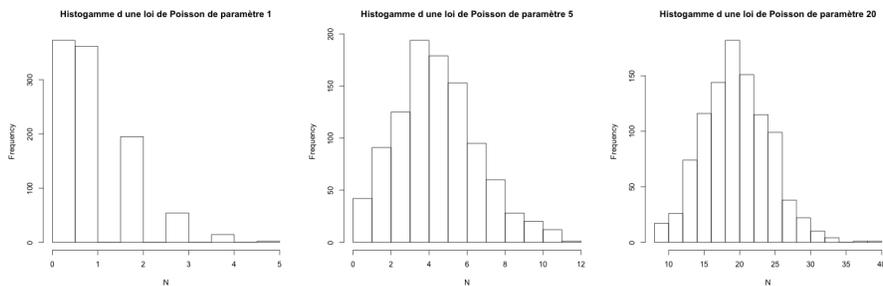
$N$  est une variable de Poisson de paramètre  $\lambda$  si

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}$$

On a alors

$$\mathbb{E}[N] = \lambda \quad \text{Var}(N) = \lambda.$$

Si  $N_1, N_2, \dots, N_n$  sont des variables de Poisson indépendantes de paramètre respectif  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  alors  $N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$  est une variable de Poisson de paramètre  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ .



### 1.3.2 Binomiale $\mathcal{B}(m, q)$

$N$  suit la loi binomiale si

$$\mathbb{P}(N = k) = \binom{m}{k} q^k (1 - q)^{m-k} \text{ avec } k \in \{0, \dots, m\}$$

On a

$$\mathbb{E}[N] = mq \quad \text{Var}(N) = mq(1 - q).$$

La loi binomiale modélise la situation suivante : on compte le nombre de succès parmi  $n$  expériences réalisées de façon indépendantes.

### 1.3.3 Géométrique $\mathcal{G}(\beta)$

$N$  suit la loi géométrique si

$$\mathbb{P}(N = k) = \left(\frac{1}{\beta + 1}\right) \left(\frac{\beta}{\beta + 1}\right)^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

On a

$$\mathbb{E}[N] = \beta \quad \text{Var}(N) = \beta(1 + \beta).$$

La loi géométrique modélise la situation suivante : on itère une expérience jusqu'à obtenir un succès et on compte le nombre d'essais nécessaires.

### 1.3.4 Binomiale négative $\mathcal{BN}(r, \beta)$

$N$  suit la loi binomiale négative si

$$\mathbb{P}(N = k) = \binom{r + k - 1}{k} \left(\frac{1}{\beta + 1}\right)^r \left(\frac{\beta}{\beta + 1}\right)^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

On a

$$\mathbb{E}[N] = r\beta \quad \text{Var}(N) = r\beta(1 + \beta).$$

On remarque que  $\text{Var}(N) > \mathbb{E}[N]$ .

La loi binomiale négative modélise la situation suivante : on compte le nombre d'échec nécessaires pour avoir  $n$  succès en répétant de façon successive une expérience où la probabilité d'avoir un succès est  $p = \frac{1}{\beta + 1}$ .

### 1.3.5 La famille $(a, b, 0)$

**Définition 1.3.1.** La distribution  $(p_k)_{k \leq 0}$  d'une variable discrète appartient à la famille  $(a, b, 0)$  s'il existe des constantes  $a, b$  telles que

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k} \quad k = 1, 2, \dots$$

Une distribution de la famille  $(a, b, 0)$  est entièrement caractérisée par les valeurs  $a, b$  et  $p_0$ .

Toutes les distributions vues plus haut appartiennent à cette famille :

- Poisson :  $a = 0, b = \lambda, p_0 = e^{-\lambda}$ .
- Binomial :  $a = \frac{-q}{1-q}, b = (m+1)\frac{q}{1-q}, p_0 = (1-q)^m$
- Binomiale négative :  $a = \frac{\beta}{1+\beta}, b = (r-1)\frac{\beta}{1+\beta}, p_0 = (1+\beta)^{-r}$
- Géométrique :  $a = \frac{\beta}{1+\beta}, b = 0, p_0 = (1+\beta)^{-1}$

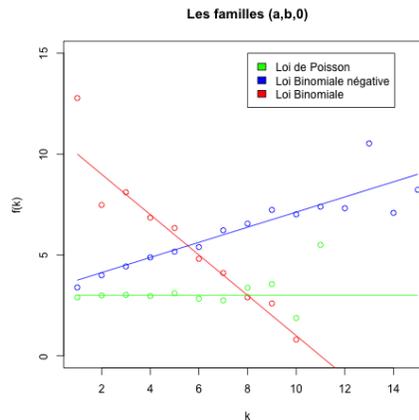
On peut réécrire la formule récursive de la façon suivante :

$$f(k) = k \frac{p_k}{p_{k-1}} = ak + b$$

est l'équation d'une droite. De façon empirique, l'allure de

$$\hat{f}(k) = k \frac{\hat{p}_k}{\hat{p}_{k-1}} = k \frac{n_k}{n_{k-1}}$$

donne une indication sur le choix du modèle.

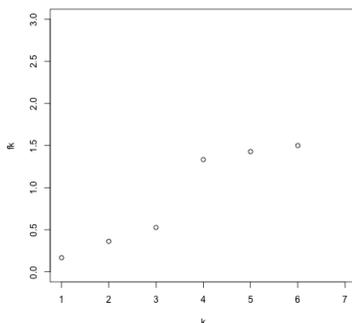


Comparaison entre la valeur simulée et la valeur théorique de  $f(k)$ .

#### Exemple 1.3.2.

Nbre d'accidents	Nbre de polices	$k \frac{n_k}{n_{k-1}}$
$k$	$n_k$	
0	7840	
1	1317	0.17
2	239	0.36
3	42	0.53
4	14	1.33
5	4	1.43
6 et plus	1	1.5

On se demande quelle est la loi sous-jacente.



Il est peu probable que ce soit une loi Binomiale, car la pente semble positive, par contre il est difficile de savoir si elle est suffisamment positive pour écarter la loi de Poisson.

## 1.4 Familles de lois continues

Voici les principales lois qu'on risque de rencontrer :

- Exponentielle qui permet de modéliser des temps d'attente avec absence de mémoire de densité : soit  $\lambda > 0$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}.$$

Généralisation : exponentielle inverse

- Pareto qui permet de modéliser les très gros sinistres (facile à repérer car le log de la fonction de survie est linéaire en fonction du log des coût) de densité : soit  $\theta, \alpha > 0$ ,

$$f(x) = \alpha \frac{\theta^\alpha}{(x + \theta)^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{x \geq 0}.$$

Généralisation : Pareto généralisée, Pareto inverse

- Burr souvent utilisée pour étudier les revenus des ménages, de densité : soit  $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \alpha \beta \frac{x^{\beta-1}}{(1 + x^\beta)^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{x \geq 0}.$$

Généralisation : Burr inverse

- Log-logistique pour modéliser des durée de vie dont l'intensité peut croître ou décroître, de densité : soit  $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \frac{(x/\alpha)^{\beta-1}}{(1 + (x/\alpha)^\beta)^2} \mathbb{1}_{x \geq 0}.$$

- Gamma souvent utilisée en crédibilité et en tarification, de densité : soit  $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{x \geq 0}.$$

Si  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ .

Généralisation : Log-Gamma, Gamma inverse

- Gumbel, qui permet de modéliser un maximum, de densité : soit  $\mu \in \mathbb{R}$  (paramètre de position), et  $\lambda > 0$  (paramètre d'échelle)

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-(x-\mu)/\lambda} \exp\left(-e^{-(x-\mu)/\lambda}\right)$$

- Weibull qui permet aussi de modéliser la loi d'un maximum, de densité : soit  $\theta > 0$  (paramètre d'échelle),  $\tau > 0$  (paramètre de forme)

$$f(x) = \frac{\tau}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\tau-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\tau} \mathbf{1}_{x \geq 0}$$

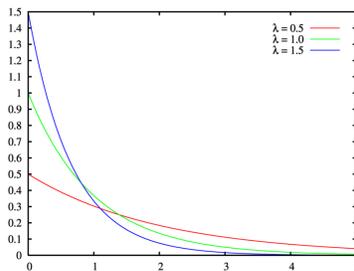
Généralisation : Weibull inverse

- Normale, loi centrale en statistique, de densité : soit  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$

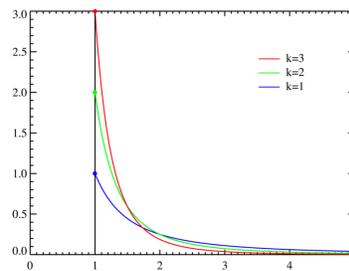
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Généralisation : LogNormale, Inverse Gaussienne

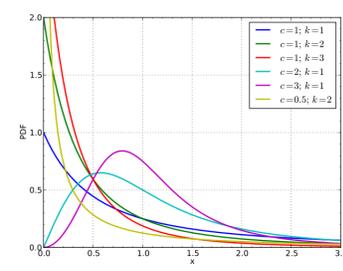
- Généralisée hyperbolique



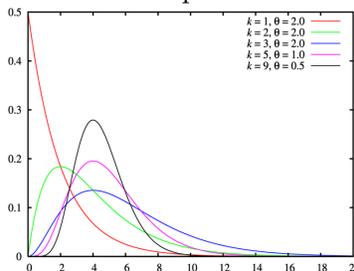
Densités exponentielles



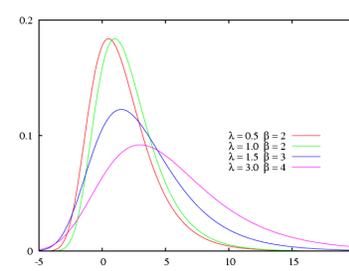
Densités de Pareto



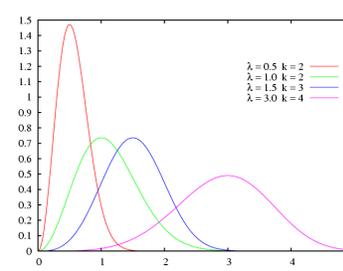
Densités de Burr



Densités de Gamma



Densités de Gumbel



Densités de Weibull

On peut construire de nouvelles lois soit par transformation soit en faisant des mélanges de lois.

Pour simuler des lois usuelles avec R mais dont vous ne connaissez pas la commande, taper `? distribution`  
 Pour simuler des lois peu usuelles, aller sur <http://cran.r-project.org/>, cliquer sur "Task Views", puis sur "Distributions".

Ensuite installer le package utile en tapant la commande `install.packages("nom du package")`. Vous pourrez alors utiliser ce package pour simuler la loi désirée.

## 1.5 Étude des queues (ailes)

Voir le chapitre 3 de Loss Models *Tails of distributions*.

Il est important surtout en assurance de connaître le type de queue d'une distribution. En général on n'aime pas avoir des queues épaisses qui signifient que les événements de grande amplitude ont une probabilité assez forte d'arriver. Une grande catastrophe, même si elle arrive rarement, est très lourde de conséquence pour les compagnies d'assurance et pour les cotes boursières.

Quelques objets permettant d'étudier les queues d'une loi

- hazard rate
- Limited expected value, Mean excess loss.

**Définition 1.5.1.** Soit  $X$  une variable de loi de densité  $f$  et de fonction de répartition  $F$ . Son hazard rate est

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \mathbb{P}(X = x + dx | X > x)$$

Si  $h$  est décroissante, on dit alors que les queues (ailes) de la loi  $X$  sont épaisses et si  $h$  est croissante alors les queues de  $X$  sont légères.

On remarque que  $S(x) = 1 - F(x) = e^{-\int_0^x h(t)dt}$

**Exemple 1.5.2.** Loi de Pareto :  $h(x) = \frac{\alpha}{x+\theta}$

Loi exponentielle :  $h(x) = \lambda$ .

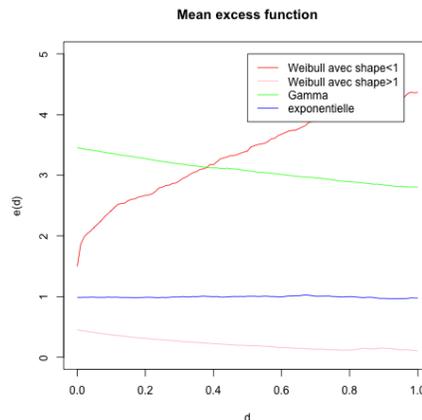
**Définition 1.5.3.** The mean excess loss (aussi appelé mean residual life) de la variable  $X$  est définie par

$$e(d) = \mathbb{E}[X - d | X > d] = \frac{1}{1 - F_X(d)} (\mathbb{E}[X] - Lev(d)),$$

où  $F$  est la fonction de répartition de  $X$ .

La fonction  $e$  caractérise la loi de  $X$  et surtout contient les informations sur les queues.

On dit qu'une distribution a des queues épaisses si  $e$  est une fonction croissante et qu'elle a des queues légères si MEL  $e$  est une fonction décroissante.



Simulation du mean excess loss pour différentes lois.

**Remarque 1.5.4.** Lien entre hazard rate et Mean excess Loss On remarque que

$$e(d) = \frac{\int_d^\infty S(x)dx}{S(d)} = \int_d^\infty e^{-\int_d^x h(t)dt} dx$$

Par la règle de l'hôpital, quand  $d \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{d \rightarrow \infty} e(d) \rightarrow \frac{-S(d)}{-fd} = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{h(d)}.$$

Cette relation permet de comprendre pourquoi les propriétés de queues épaisses et queues légères sont inversées pour  $h$  et  $e$ .

Le souci est que le MEL est en général difficile à calculer et on prend parfois cette caractérisation : une distribution a des queues épaisses si  $e(d) \rightarrow \infty$  si  $d \rightarrow \infty$  (ailes sous-exponentielles) et sinon elle a des queues légères (ailes sur-exponentielles).

Équivalent du mean excess life quand  $d \rightarrow \infty$  pour quelques lois connues :

$$\text{Pareto : } \frac{\theta+d}{\alpha-1}, \alpha > 1$$

$$\text{Burr : } \frac{d}{\alpha\beta-1}, \alpha\beta > 1$$

$$\text{Loggamma : } \frac{d}{\alpha-1}, \alpha > 1$$

$$\text{Weibull : } \frac{d^{1-\tau}}{c\tau}$$

$$\text{Gamma : } \beta^{-1} \left(1 + \frac{\alpha-1}{\beta d}\right)$$

$$\text{Exponentielle : } \lambda^{-1}.$$

Par conséquent,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Exponentielle} \\ \text{Gamma} \\ \text{Weibull avec } \tau \geq 1 \end{array} \right\} \text{ queues légères} \qquad \left. \begin{array}{l} \text{Log-Normale} \\ \text{Pareto} \\ \text{Weibull avec } \tau < 1 \\ \text{Burr} \\ \text{Log-Gamma} \end{array} \right\} \text{ queues épaisses}$$

## 1.6 Créer de nouvelles lois

### 1.6.1 Lois mélanges (ou mixtures)

On peut définir une nouvelle variable aléatoire  $Y$  de fonction de répartition :

$$F_Y(y) = \alpha_1 F_{X_1}(y) + \dots + \alpha_N F_{X_N}(y)$$

où  $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = 1$  et les  $F_{X_i}$  sont des lois données.

Pour simuler une variable  $Y$ , il suffit de simuler les variables  $X_i$  et une variable  $U$  uniforme  $\mathcal{U}([0,1])$  indépendantes, on a

$$Y = X_1 \mathbb{1}_{0 \leq U < \alpha_1} + X_2 \mathbb{1}_{\alpha_1 \leq U < \alpha_1 + \alpha_2} + \dots + X_N \mathbb{1}_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{N-1} \leq U < 1}.$$

Si on veut programmer ceci en R, voici ce que ça donne :

- simuler les variables  $X_i$  chacune de loi  $F_{X_i}$
- simuler une loi variable uniforme  $U = \text{runif}(1,0,1)$
- $p = \text{cumsum}(\alpha)$
- $Y = X_1 * (U < p[1]) + X_2 * (U \geq p[1] \& U < p[2]) + \dots + X_N * (U \geq p[N-1])$

**Exemple 1.6.1.** Soit  $X_1$  une variable de Pareto( $\theta_1, \alpha$ ) qui représente les grandes réclamations, et  $X_2$  une Pareto( $\theta_2, \alpha + 2$ ) qui représente les petites réclamations. On note  $a$  la fréquence des grandes réclamations, alors

$$Y = aX_1 + (1 - a)X_2$$

représente l'ensemble des réclamations. Sa fonction de répartition est

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= aF_{X_1}(y) + (1-a)F_{X_2}(y) \\ &= 1 - a \left( \frac{\theta_1}{\theta_1 + x} \right)^\alpha - (1-a) \left( \frac{\theta_2}{\theta_2 + x} \right)^{\alpha+2} \end{aligned}$$

Une autre façon de faire des mélanges est de mettre une loi sous-jacente sur les paramètres. Si  $X$  une variable de fonction de répartition  $F_X$  qui dépend d'un paramètre  $\lambda$ , on peut imaginer que le  $\lambda = \Lambda$  est lui même aléatoire. On a donc  $X \sim F_{X|\Lambda}(x|\lambda)$  et  $\Lambda \sim F_\Lambda(\lambda)$ , alors

$$F_X(x) = \int F_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda.$$

On calcule alors les moments de  $X$  en utilisant l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^k|\Lambda]] \quad \text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X|\Lambda)] + \text{Var}(\mathbb{E}[X|\Lambda]).$$

Par exemple, on obtient la loi de pareto en mélangeant une loi exponentielle  $X|\Lambda \sim \mathcal{E}(\Lambda)$  et une loi Gamma  $\Lambda \sim \text{Gamma}$ .

Une loi binomiale négative est un mélange de loi de Poisson et de Gamma : si  $\lambda$  suit une loi  $\text{Gamma}(n, \beta)$  et  $N|\lambda$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , alors  $N$  suit une binomiale négative.

L'inverse gaussienne Normale est obtenue en mélangeant une loi normale  $X|W \sim \mathcal{N}(\mu + \beta W, W)$  et une inverse gaussienne  $W \sim$  inverse gaussienne. On l'utilise pour modéliser es prix des actions.

## 1.6.2 Transformations de lois

On peut imaginer toutes les transformations possibles, les plus couramment utilisées sont les suivantes.

—  $Y = X^{\frac{1}{\tau}}$ .

Si  $\tau > 0$ , alors  $F_Y(y) = F_X(y^{1/\tau})$

Si  $\tau < 0$ , alors  $F_Y(y) = 1 - F_X(y^{1/\tau})$  (loi inverse)

On retrouve souvent, l'exponentielle inverse, la loi de Weibull qui est une transformation de la loi exponentielle et la Weibull inverse.

—  $Y = e^X$ .

On a lors  $F_Y(y) = F_X(\ln(y))$ .

On retrouve la Log-Normale et la Log-Gamma.

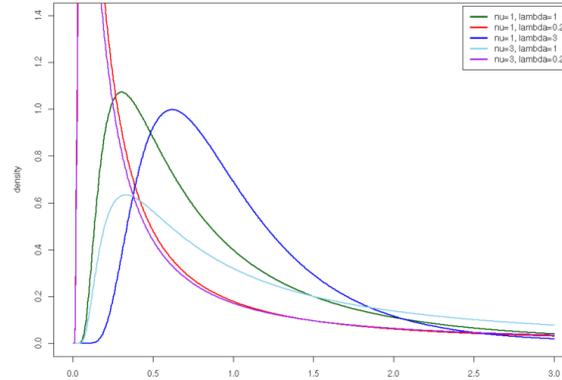
## 1.6.3 Inverse Gaussienne

$X \sim IG(\mu, \theta)$  a pour densité

$$f_{IG}(x) = \left( \frac{\theta}{2\pi x^3} \right)^{1/2} \exp \left[ \frac{-\theta(x - \mu)^2}{2x\mu} \right] \mathbf{1}_{x \in (0, \infty)} \quad \text{avec } \theta > 0, \mu > 0.$$

Le paramètre  $\theta$  est un paramètre de forme.

Il s'agit de la loi du premier temps d'atteinte d'un niveau fixé par un mouvement brownien avec une dérive positive : si  $X_t = \mu t + \sigma B_t$  est un mouvement brownien avec dérive et  $T_a = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$  le temps d'atteinte du niveau  $a$  par  $X_t$ , alors  $T_a \sim IG(a/\mu, a^2/\sigma^2)$ .



Densités Inverse-Gaussienne.

Cette loi possède les caractéristiques suivantes :

- $\mathbb{E}[IG] = \mu$ ,  $Var(IG) = \frac{\mu^3}{\theta}$ .
- On peut calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres.
- Souvent utilisée pour les pertes agrégées : la somme de variables inverse-gaussiennes indépendantes est une inverse gaussienne.

Autre paramétrisation de l'inverse gaussienne : pour  $x > 0$

$$f_{IG}(x) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{\delta\gamma x^{-3/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\delta^2 x^{-1} + \gamma^2 x)\right].$$

On a alors  $\mathbb{E}[IG] = \frac{\delta}{\gamma}$  et  $Var(IG) = \frac{\delta}{\gamma^3}$ .

On peut ainsi rapprocher l'inverse gaussienne de la fonction de Bessel de troisième espèce : pour  $z > 0$

$$K_\lambda(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\lambda-1} \exp\left[\frac{-1}{2}z(y^{-1} + y)\right] dy$$

En prenant  $y = \frac{\gamma}{\delta}x$ ,  $z = \gamma\delta$  et  $\lambda = -1/2$  on voit le lien entre ces deux fonctions.

Inverse Gaussienne généralisée (*GIG*) : pour  $x > 0$

$$f_{GIG}(x) = \frac{(\gamma/\delta)^\lambda}{2K_\lambda(\gamma\delta)} x^{\lambda-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(\delta^2 x^{-1} + \gamma^2 x)\right].$$

Les paramètres vérifient :

$$\begin{cases} \delta \geq 0, \gamma > 0 & \text{si } \lambda > 0 \\ \delta > 0, \gamma > 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ \delta > 0, \gamma \geq 0 & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Cette loi est utilisée, par exemple, en géostatistique, en hydrologie ou en finance.

Sa fonction génératrice des moments vaut alors

$$M_{GIG}(u) = \left(1 - 2\frac{u}{\gamma^2}\right)^{-\lambda/2} \frac{K_\lambda(\delta\gamma\sqrt{1 - 2\frac{u}{\gamma^2}})}{K_\lambda(\delta\gamma)}.$$

On a aussi, pour  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{E}[GIG^k] = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^k \frac{K_{\lambda+k}(\delta\gamma)}{K_\lambda(\delta\gamma)}.$$

**Propriété 1.6.2.** *A propos des fonctions de Bessel.*

- $K_{-1/2}(x) = \sqrt{\pi/2}x^{-1/2}e^{-x}$
- $K_{-\lambda}(x) = K_{\lambda}(x)$ .
- $K_{\lambda+1}(x) = \frac{2\lambda}{x}K_{\lambda}(x) + K_{\lambda-1}(x)$ .
- $\frac{d}{dx}K_{\lambda}(x) = -\frac{\lambda}{x}K_{\lambda}(x) + K_{\lambda-1}(x)$ .

On remarque que si  $\delta = 0$  on retrouve la  $\text{Gamma}(\lambda, \gamma^2/2)$  et si  $\lambda = -1/2$  on retrouve  $IG(\delta, \gamma)$ .

#### 1.6.4 Hyperboliques Généralisées

On considère la loi de  $X$  avec  $X|W \sim \mathcal{N}(\mu + \beta W, W)$  et  $W \sim GIG$ . Sa densité est

$$f_{GH}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda) = \int_0^{\infty} f_{\mathcal{N}}(x; \mu + \beta w, w) f_{GIG}(w; \lambda, \delta, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) dw$$

avec

$$\begin{cases} \delta \geq 0, |\beta| < \alpha & \text{si } \lambda > 0 \\ \delta > 0, |\beta| < \alpha & \text{si } \lambda = 0 \\ \delta > 0, |\beta| \leq \alpha & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

On peut réécrire la densité de la façon suivante, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_{GH}(x) = A(\alpha, \beta, \delta, \lambda) (\delta^2 + (x - \mu)^2)^{(\lambda-1/2)/2} e^{\beta(x-\mu)} K_{\lambda-1/2}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2})$$

avec

$$A(\alpha, \beta, \delta, \lambda) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda-1/2} \delta^{\lambda} K_{\lambda}(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}.$$

$\alpha$  est le paramètre de forme,  $0 \leq |\beta| < \alpha$  est le skewness,  $\mu \in \mathbb{R}$  est un paramètre de localisation et  $\delta > 0$  est le paramètre d'échelle.  $\lambda \in \mathbb{R}$  permet de caractériser certaines sous-classes et influence beaucoup la taille des ailes.

Sa fonction génératrice des moments :

$$m_{GH}(u) = e^{\mu u} \left( \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right)^{\lambda/2} \frac{K_{\lambda}(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2})}{K_{\lambda}(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}.$$

Ses moments

$$\mathbb{E}[GH] = \mu + \beta \mathbb{E}[GIG] \quad \text{Var}(GH) = \mathbb{E}[GIG] + \beta^2 \text{Var}(GIG).$$

Cas Particuliers :

- $\lambda = 1$  : loi hyperbolique

$$f_H(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} e^{-\alpha \sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta(x-\mu)}$$

- $\lambda = -1/2$  : Inverse Gaussienne Normale  $NIG$  (mélange d'une normale et d'une  $IG$ )

$$f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\alpha\delta}{\pi} \exp\left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)\right) \frac{K_1(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2})}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}}.$$

Sa fonction génératrice des moments est

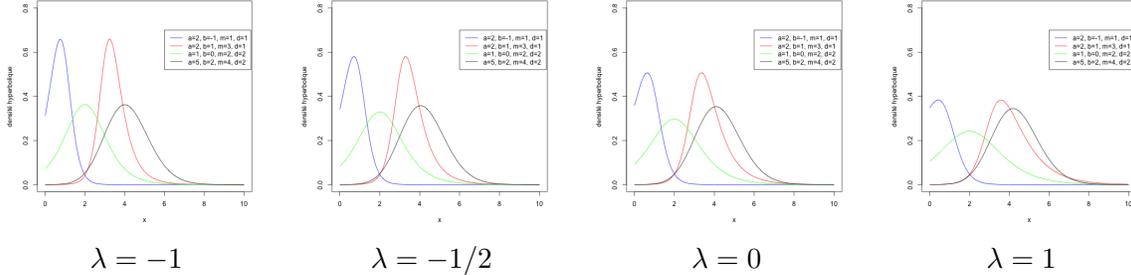
$$m_{NIG}(u) = \exp\left(\mu u - \delta \left[ \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right]\right)$$

Ses moments

$$\mathbb{E}[NIG] = \frac{\delta\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} + \mu \quad \text{Var}(NIG) = \alpha^2\delta(\alpha^2 - \beta^2)^{-3/2}$$

$$\text{Skewness} = 3\beta\alpha^{-1}\delta^{-1/2}(\alpha^2 - \beta^2)^{-1/4} \quad \text{Kurtosis} = 3\left(1 + \frac{\alpha^2 + 4\beta^2}{\delta\alpha^2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}\right)$$

Densité de la loi hyperbolique pour différentes valeurs des paramètres :



## 1.7 Loi du maximum

On considère  $X_1, X_2, \dots$  des variables i.i.d. de loi  $F$  et

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n) \quad S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

### 1.7.1 Lois sous-exponentielles

On note  $F^{*n}$  la loi de  $S_n$  :  $F^{*n} = F * F * \dots * F$  où est le symbole de convolution.  
( $n$  fois)

**Définition 1.7.1.** Une loi  $F$  sur  $(0, \infty)$  est sous-exponentielle si pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*n}(x)}}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{*n}(x)}{1 - F(x)} = n.$$

On a

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = F^n(x).$$

Par conséquent  $\overline{F^n}(x) = \mathbb{P}(M_n > x)$ .

Par ailleurs, en utilisant les résultats sur les séries géométriques, on a pour tous les  $x$  tels que  $F(x) < 1$ ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) = \frac{1 - F^n(x)}{1 - F(x)} = \frac{\overline{F^n}(x)}{\overline{F}(x)}.$$

D'où,  $\mathbb{P}(M_n > x) = \overline{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x)$ . Par ailleurs, il est clair que si  $x \rightarrow \infty$ ,  $\sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) \rightarrow n$  et donc

$$\mathbb{P}(M_n > x) \sim n\overline{F}(x) \quad \text{quand } x \rightarrow \infty.$$

Pour une loi sous-exponentielle, on a

$$\overline{F^{*n}}(x) \sim n\overline{F}(x) \quad \text{pour } x \text{ grand}$$

ce qui signifie que les queues de la somme se comportent comme celle du maximum,

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim M_n.$$

**Propriété 1.7.2.** Si  $F$  est une sous-exponentielle alors pour tout  $y > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1$$

Ceci signifie que  $X$  peut prendre des grandes valeurs car pour  $x$  grand,  $\mathbb{P}(X+y > x) \simeq \mathbb{P}(X > x)$  pour tout  $y > 0$

### 1.7.2 Théorème de Fisher-Tippett

**Théorème 1.7.3.** théorème de Fisher-Tippett *S'il existe une normalisation  $c_n > 0$  et  $d_n \in \mathbb{R}$  et une variable  $H$  telles que*

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{\text{Loi}} H \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

alors la loi de  $H$  est une loi des valeurs extrêmes de densité, pour  $1 + \lambda x > 0$

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} e^{-(1+\lambda x)^{-1/\lambda}} & \text{pour } \lambda \neq 0 \\ e^{-x} & \text{pour } \lambda = 0 \end{cases}$$

On remarque que pour  $\lambda > 0$  on a une loi de Fréchet, pour  $\lambda < 0$  une loi de Weibull et pour  $\lambda = 0$  une loi de Gumbel.

Quand la condition du théorème est vérifiée, on dit que la loi  $F$  est dans le Max-domaine d'attraction (MDA) de  $f_\lambda$ . Les lois dans le MDA de la loi de Fréchet ( $\lambda > 0$ ) ont des queues épaisses, comme les lois de Pareto, Cauchy, Burr,  $\alpha$ -stable.

Les lois dans le MDA de la loi de Gumbel ont des queues modérées, comme les lois normale, log-normale, exponentielle, Gamma,...

Les lois dans le MDA de la loi de Weibull ont des queues légères, comme les lois uniforme, bêta.

### 1.7.3 Comparaison de $S_n$ et $M_n$

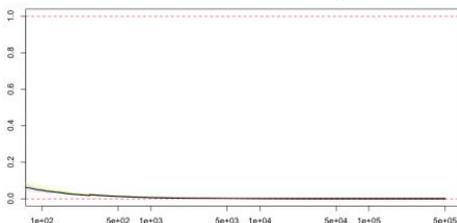
**Propriété 1.7.4.**  $\mathbb{E}[X] < \infty$  si et seulement si

$$\frac{M_n}{S_n} \xrightarrow{a.s} 0.$$

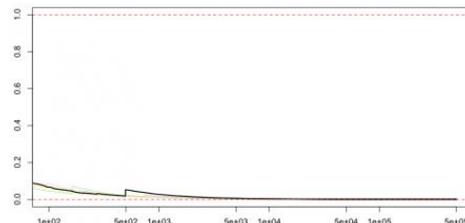
Quand  $\mathbb{E}[X]$  n'est pas fini, on peut avoir ce type de comportement

$$\frac{M_n}{S_n} \xrightarrow{\text{Loi}} Z \quad \text{ou} \quad \frac{M_n}{S_n} \xrightarrow{\text{proba}} 1$$

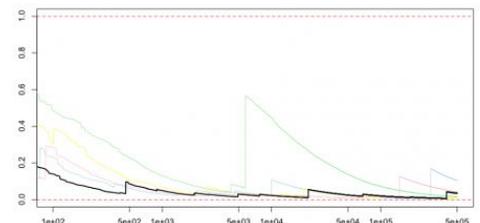
Traçons l'évolution de  $\frac{M_n}{S_n}$  en fonction de  $n$  pour différentes lois :



Exponentielle



Log-Normale



Pareto

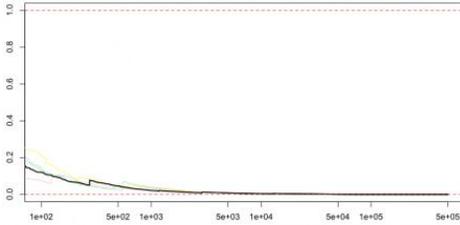
Par analogie, pour tout  $k > 0$ , en notant

$$M_n(k) = \max(X_1^k, \dots, X_n^k) \quad S_n(k) = X_1^k + X_2^k + \dots + X_n^k$$

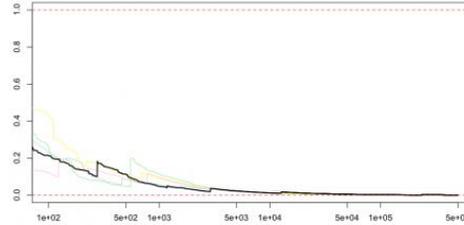
on a  $\mathbb{E}[X^k] < \infty$  si et seulement si

$$\frac{M_n(k)}{S_n(k)} \xrightarrow{a.s.} 0.$$

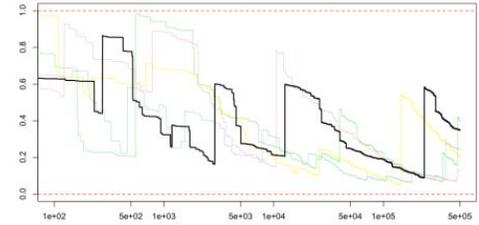
Traçons l'évolution de  $\frac{M_n(k)}{S_n(k)}$  en fonction de  $n$  pour différentes lois et différentes valeurs de  $k$  :



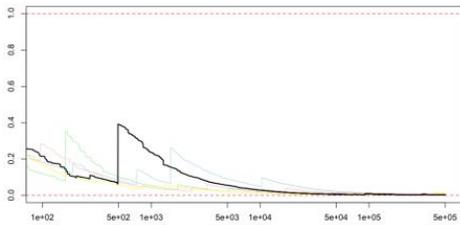
Exponentielle avec  $k = 2$



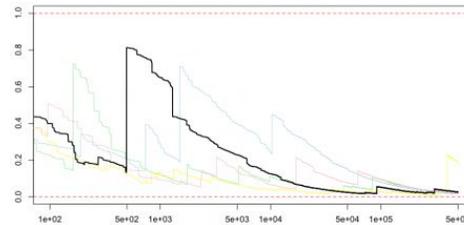
$k = 3$



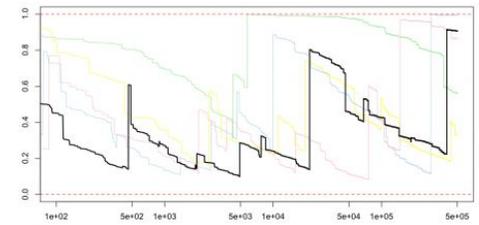
$k = 10$



Log-Normale avec  $k = 2$



Log-Normale avec  $k = 3$



Pareto avec  $k = 2$



# Chapitre 2

## Les modèles agrégés des pertes

### 2.1 Les modèles

#### Le modèle collectif

On considère une compagnie d'assurance où les pertes sont enregistrées au fur et à mesure qu'elles arrivent. On note  $X_i$  le montant de la  $i^{\text{ème}}$  perte et  $N$  le nombre de pertes.  $N$  peut par exemple être le nombre de pertes sur une année pour la compagnie. Le montant global est

$$S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

On suppose

- les  $X_i$  indépendantes et de même loi
- $N$  est indépendante des  $X_i$ .

On parle de modèle collectif car on associe la même loi à chaque perte.

#### Le modèle individuel de risque

On modélise les pertes totales de chaque contrat et on regarde le montant global pour la compagnie d'assurance

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

où

- $n$  est le nombre de contrats dont s'occupe la compagnie d'assurance (valeur connue, ce n'est pas une variable aléatoire)
- $X_i$  est le montant total des réclamations du  $i^{\text{ème}}$  contrat. Les  $X_i$  sont supposées indépendants, mais pas forcément de même loi. En général, la distribution de chaque  $X_i$  a une masse en 0 qui correspond à la probabilité de ne pas avoir de perte pour chaque contrat.

Ce modèle est souvent utilisé en assurance santé lorsqu'on considère un groupe de  $n$  employés d'une entreprise où il est difficile de modéliser les pertes par des variables de même loi. En effet, chaque employé a une couverture différente (car fonction de leur salaire) et un comportement différent (les dépenses dépendent notamment de l'âge des employés).

On parle de modèle individuel car on regarde les caractéristiques de chaque individu.

Le modèle individuel avec des  $X_i$  de même loi est un cas particulier du modèle collectif quand  $N$  est une constante ( $\mathbb{P}(N = n) = 1$ ).

**Remarque 2.1.1.** *Il est assez naturel de vouloir relâcher l'hypothèse d'indépendance entre les  $X_i$ . Le modèle individuel est plus facile à étudier que le collectif dans le cas où les  $X_i$  ne sont pas indépendantes.*

**Exemple 2.1.2.** Regardons un modèle collectif de pertes. On sait que les pertes suivent la loi  $F_X$ . L'assureur paye 80% des pertes individuelles en excès de 1 000\$ avec un paiement maximal de 100 000\$. Tous les paiements en excès de 50 000\$ sont réassurés. On va décrire des modèles pour

1. les pertes totales pour l'assuré avant l'assurance :  
on note  $N$  le nombre de perte (a priori aléatoire), on a alors

$$S_N^a = X_1 + \dots + X_N$$

avec  $X_i \sim F_X$

2. les pertes totales pour la compagnie d'assurance avant la réassurance :  
On note  $Y_i$  le  $i^{\text{ème}}$  paiement fait par l'assureur avant réassurance. Si  $X_i \leq 1000$ , alors  $Y_i = 0$ . Si  $X_i > 1000$ , alors le paiement est  $Y_i = 0.8(X_i - 1000)$ . Par ailleurs cette valeur ne peut pas excéder 100 000\$, ce qui correspond à une valeur de  $1000 + 100\,000/0.8 = 126\,000$ \$. Par conséquent, le montant total des pertes pour l'assureur avant réassurance est

$$S_N^c = Y_1 + \dots + Y_N$$

avec  $Y_i = \min(0.8(X_i - 1000), 100\,000)\mathbf{1}_{X_i \geq 1000}$ .

3. les pertes totales pour le réassureur :  
Le réassureur paye tous les paiements en excès de 50 000\$. Un paiement de 50 000\$ correspond à une perte de  $1000 + 50\,000/0.8 = 63\,500$ \$. Par ailleurs, le montant maximal versé par la compagnie est de 100 000\$ et donc le montant maximal versé par le réassureur est 50 000\$. Par conséquent, les pertes totales pour le réassureur sont

$$S_N^r = Z_1 + \dots + Z_N$$

avec  $Z_i = \min(0.8(X_i - 63\,500), 50\,000)\mathbf{1}_{X_i \geq 63\,500}$ .

4. les pertes totales pour la compagnie d'assurance après réassurance :

$$\begin{aligned} P_N^c &= S_N^c - S_N^r = \sum_{i=1}^N [0.8(X_i - 1000)\mathbf{1}_{1000 \leq X_i < 63\,500} + 50\,000\mathbf{1}_{X_i \geq 63\,500}] \\ &= \sum_{i=1}^N \min(0.8(X_i - 1000), 50\,000)\mathbf{1}_{1000 \leq X_i}. \end{aligned}$$

5. les pertes totales pour l'assuré après assurance :

$$P_N^a = S_N^a - S_N^c = \sum_{i=1}^N [X_i\mathbf{1}_{X_i < 1000} + (800 + 0.2X_i)\mathbf{1}_{1000 \leq X_i \leq 126\,000} + (X_i - 100\,000)\mathbf{1}_{X_i > 126\,000}].$$

## 2.2 Choix de modèles

Certaines caractéristiques sont recherchées dans un modèle pour la fréquence et/ou sévérité.

### 2.2.1 Pour la sévérité

Pour la sévérité on aime avoir une loi avec un paramètre d'échelle, du fait de la notion d'unité. En effet, le choix de la devise ne doit pas affecter la loi : la conversion en dollars, en euros, en yen,... ne doit pas modifier le modèle. De plus, lorsqu'on considère une loi avec un paramètre d'échelle, il est assez simple de prendre en considération l'inflation.

**Définition 2.2.1.** Une loi  $F_X$  est dite à échelle si pour tout  $c > 0$   $\mathbb{P}(cX \leq x)$  appartient à la même famille que  $F_X$ .

**Exemple 2.2.2.** Loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  : soit  $c > 0$

$$\mathbb{P}(cX \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x/c) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{c}x}$$

On reste dans la famille des lois exponentielles car  $cX \sim \mathcal{E}(\lambda/c)$ .

**Définition 2.2.3.** Un paramètre  $\theta \in \mathbb{R}$  est dit d'échelle pour une v.a.  $X \sim F_X^\theta$  si pour tout  $c > 0$  la loi de  $cX$  est  $F_X^{c\theta}$ , les autres paramètres restant inchangés.

**Exemple 2.2.4.** Loi Gamma( $\alpha, \theta$ ) de densité

$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{1}{\theta \Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1} e^{-x/\theta} \mathbf{1}_{x \geq 0}$$

et de fonction de répartition pour  $x \geq 0$

$$F_X(x; \alpha, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x/\theta} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Par conséquent, pour  $c > 0$

$$\mathbb{P}(cX \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x/c) = F_X(x; \alpha, c\theta).$$

### 2.2.2 Pour la fréquence

Pour la fréquence, on aime avoir des lois qui sont préservées par la somme. Comme par exemple, la somme de deux lois de Poisson indépendantes est une loi de Poisson. Cette propriété permet l'ajout de nouvelles données de façon assez simple.

Pour la fréquence  $N$  on choisit souvent des lois dépendant d'un paramètre  $\lambda$  telle qu'il existe une variable  $\bar{N}$  tel que  $N$  peut s'écrire comme la somme de  $\lambda$  variables  $\bar{N}$  indépendantes. Ceci se traduit sur la fonction génératrice des moments de la façon suivante :

$$M_N(z; \alpha) := \mathbb{E}[e^{zN}] = (M_{\bar{N}}(z))^\lambda.$$

Ce type de loi est appelée loi infiniment divisible.

**Exemple 2.2.5.** Si  $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ , alors

$$M_N(z; \lambda) = e^{\lambda(e^z - 1)} = (e^{e^z - 1})^\lambda = (M_{\bar{N}}(z))^\lambda$$

avec  $\bar{N} \sim \mathcal{P}(1)$ .

### 2.2.3 Pour les pertes agrégées

On note  $S = X_1 + \dots + X_N$  la perte totale d'une compagnie d'assurance.

On doit choisir un modèle pour la fréquence  $N$  et un modèle pour les sévérités  $X_i$ , pour ensuite étudier la loi du modèle  $S$ .

## 2.3 Loi de $S_N$ en fonction de la loi de $X$ et de $N$

### 2.3.1 Fonction de répartition et densité de $S_N$

**Proposition 2.3.1.** La convolution.

Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables indépendantes de même loi de densité  $f_X$  alors la densité de  $X_1 + X_2$  est la convolution  $f_X * f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(y)f_X(x-y)dy$ .

*Démonstration.* Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables indépendantes de même loi de densité  $f_X$ , alors la fonction de répartition de  $X_1 + X_2$  est

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq x) &= \iint_{y+z \leq x} f_{(X_1, X_2)}(y, z) dy dz = \iint_{y+z \leq x} f_X(y) f_X(z) dy dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) \left( \int_{-\infty}^{x-y} f_X(z) dz \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) F_X(x-y) dy. \end{aligned}$$

On dérive par rapport à  $x$  et on obtient que la densité de  $X_1 + X_2$  vaut

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) f_X(x-y) dy = f_X * f_X(x).$$

□

On remarque que si  $X_1$  et  $X_2$  sont des variables positives, la fonction de répartition de  $X_1 + X_2$  vérifie

$$F_{X_1+X_2}(x) = \int_0^x f_X(y) F_X(x-y) dy.$$

**Définition 2.3.2.** Soit  $F_X$  une fonction de répartition d'une loi à densité  $f_X$  à support sur  $\mathbb{R}^+$ . On considère  $X_1, \dots, X_n$  des v.a. i.i.d. de loi  $F_X$ .

On note  $F_X^{*2}(x) = \int_0^x f_X(y) F_X(x-y) dy$  la fonction de répartition de  $S_2 = X_1 + X_2$ .

Par itération, pour tout  $n \geq 1$ , la fonction de répartition de  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , notée  $F_X^{*n}$ , vérifie

$$F_X^{*n}(x) = \int_0^x f_X(y) F_X^{*(n-1)}(x-y) dy.$$

$$\text{avec } F_X^{*0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

De même pour  $n \geq 1$ , on note  $f_X^{*n}(x) = \underbrace{f_X * \dots * f_X}_{n \text{ fois}}(x)$  et  $f_X^{*0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x = 0 \\ 0 & \text{pour } x \neq 0 \end{cases}$ .

**Exemple 2.3.3.** On considère deux temps d'attente  $X_1$  et  $X_2$  indépendants de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ , par exemple  $X_i$  représente le temps d'attente au guichet  $i$ . Alors la somme des temps d'attente  $X_1 + X_2$  admet pour densité, pour  $x \geq 0$

$$f_X^{*2}(x) = \int_0^x f_X(y)f_X(x-y)dy = \lambda^2 \int_0^x e^{-\lambda y} e^{-\lambda(x-y)} dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

On reconnaît la loi **Gamma**(2,  $\lambda$ ) (résultat bien connu).

**Proposition 2.3.4.** On considère le modèle de pertes agrégées  $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$  où les  $X_i$  sont i.i.d. de loi  $F_X$  et indépendantes de  $N$ .

Alors la fonction de répartition de  $S_N$  est

$$F_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x) \quad \text{avec } p_n = \mathbb{P}(N = n)$$

et sa densité est

$$f_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x).$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} F_{S_N}(x) &= \mathbb{P}(S_N \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \leq x, N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \leq x) \mathbb{P}(N = n) \quad \text{par indépendance entre les } X_i \text{ et } N \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x). \end{aligned}$$

□

**Remarque 2.3.5.** Quand la loi des  $X_i$  est discrète

Le raisonnement est exactement le même, sauf qu'à la place d'avoir des intégrales on a des sommes :  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  où  $X_i$  sont des variables positives i.i.d. de loi discrète  $f_X(y) = \mathbb{P}(X = y)$  a pour fonction de répartition

$$F^{*n}(x) = \sum_{y=0}^x F^{*(n-1)}(x-y)f_X(y), \quad \text{pour } x = 0, 1, \dots$$

et pour loi

$$\mathbb{P}(S_n = x) = f_X^{*n}(x) = \sum_{y=0}^x f_X^{*(n-1)}(x-y)f_X(y).$$

**Exemple Assurance Dentaire**

Pour un plan d'assurance dentaire pour un groupe, on a compilé les statistiques des coûts annuel par personne :

$x$	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	0.20	0.30	0.25	0.20	0.05

où  $x$  représente des unités de 100\$. Par ailleurs les fréquences estimées des réclamations par police sont

$n$	0	1	2	3	4
$p_n$	0.10	0.25	0.3	0.20	0.15

On souhaite calculer la loi du montant total annuel  $S_N$  pour une police de ce groupe.

Il est clair que  $S_N$  est une variable discrète à valeurs dans  $\{0, 1, 2, \dots, 20\}$  (unités de 100\$). En utilisant la formule  $f_{S_N} = \sum_{n \geq 0} p_n f^{*n}(x)$ , on obtient

$x$	$f^{*0}(x)$	$f^{*1}(x)$	$f^{*2}(x)$	$f^{*3}(x)$	$f^{*4}(x)$	$f_S(x)$
0	1	0	0	0	0	0.1
1	0	0.2	0	0	0	0.05
2	0	0.3	0.04	0	0	0.087
3	0	0.25	0.12	0.008	0	0.1001
4	0	0.2	0.19	0.036	0.0016	0.11444
5	0	0.05	0.23	0.084	0.0096	0.09974
6	0	0	0.2025	0.141	0.0296	0.09339
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
19	0	0	0	0	$10^{-4}$	$1.5 \times 10^{-5}$
20	0	0	0	0	$6.25 \times 10^{-6}$	$9.375 \times 10^{-7}$
$p_n$	0.10	0.25	0.3	0.20	0.15	

car

$$f^{*2}(2) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1) = 0.04$$

$$f^{*2}(3) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 3) = 2\mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 2) = 0.12$$

$$f^{*2}(4) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 4) = 2\mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 3) + \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 2) = 0.19$$

$$f^{*2}(5) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 5) = 2\mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 4) + 2\mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 3) = 0.23$$

$$f^{*3}(4) = \mathbb{P}((X_1 + X_2) + X_3 = 4) = \mathbb{P}((X_1 + X_2) = 3)\mathbb{P}(X_3 = 1) + \mathbb{P}((X_1 + X_2) = 2)\mathbb{P}(X_3 = 2) = 0.036$$

$\vdots$

On applique ensuite la formule obtenu précédemment :

$$f_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^4 p_n f^{*n}(x).$$

Le calcul de la loi de  $S_N$  n'est pas simple, on verra dans la suite une méthode itérative pour la calculer dans le cas où la loi de  $N$  appartient à la famille  $(a, b, 0)$ .

### 2.3.2 Fonction génératrice des moments de $S_N$

On note  $M_Y$  la fonction génératrice des moments d'une variable  $Y$ . Alors la fonction génératrice de  $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$  vérifie

$$\begin{aligned} M_{S_N}(z) &= \mathbb{E}[e^{zX_1 + \dots + zX_N}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{zX_1 + \dots + zX_n} \mathbf{1}_{N=n}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{zX_1 + \dots + zX_n}] \mathbb{P}(N = n) \quad \text{par indépendance entre les } X_i \text{ et } N \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{zX}]^n \mathbb{P}(N = n) \quad \text{par indépendance entre les } X_i \\ &= M_N(\ln(M_X(z))) \end{aligned}$$

### 2.3.3 Moments de $S_N$

- Moyenne : par indépendance entre les  $X_i$  et  $N$  on a

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i \mid N\right]\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N \mathbb{E}[X_i \mid N]\right] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X]$$

- Variance : on utilise la formule de la décomposition de la variance

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_N) &= \mathbb{E}[\text{Var}(S_N \mid N)] + \text{Var}(\mathbb{E}[S_N \mid N]) \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N \text{Var}(X_i \mid N)\right] + \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N \mathbb{E}[X_i \mid N]\right) \quad \text{par indépendance entre les } X_i \\ &= \mathbb{E}[N\text{Var}(X)] + \text{Var}(N\mathbb{E}[X]) \quad \text{car les } X_i \text{ sont de même loi et indépendants de } N \\ \text{Var}(S_N) &= \mathbb{E}[N]\text{Var}(X) + \text{Var}(N)\mathbb{E}[X]^2. \end{aligned}$$

- Moment centré d'ordre 3 : de même, on a

$$\mathbb{E}[(S_N - \mathbb{E}[S_N])^3] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3] + 3\text{Var}(N)\mathbb{E}[X]\text{Var}(X) + \mathbb{E}[(N - \mathbb{E}[N])^3]\mathbb{E}[X]^3.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S_N - \mathbb{E}[S_N])^3] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^N (X_i - \mathbb{E}[X]) + (N - \mathbb{E}[N])\mathbb{E}[X]\right)^3\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^N (X_i - \mathbb{E}[X])\right)^3 + (N - \mathbb{E}[N])^3\mathbb{E}[X]^3\right. \\ &\quad \left.+ 3\left(\sum_{i=1}^N (X_i - \mathbb{E}[X])\right)^2 (N - \mathbb{E}[N])\mathbb{E}[X] + 3\left(\sum_{i=1}^N (X_i - \mathbb{E}[X])\right)(N - \mathbb{E}[N])^2\mathbb{E}[X]^2\right] \\ &= \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3] + \mathbb{E}[(N - \mathbb{E}[N])^3]\mathbb{E}[X]^3 + 3\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N (X_i - \mathbb{E}[X])^2 (N - \mathbb{E}[N])\right]\mathbb{E}[X] \\ &= \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3] + \mathbb{E}[(N - \mathbb{E}[N])^3]\mathbb{E}[X]^3 + 3\text{Var}(N)\text{Var}(X)\mathbb{E}[X]. \end{aligned}$$

**Exemple Assurance Dentaire**

On reprend l'exemple précédent. On a  $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X] = 2.05 \times 2.6 = 5.33$  (en unités de 100\$) et  $\text{Var}(S_N) = \mathbb{E}[N]\text{Var}(X) + \text{Var}(N)\mathbb{E}[X]^2 = 2.05 \times 1.34 + 1.4475 \times (2.6)^2 = 12.532$ .

On aurait pu utiliser la loi de  $S_N$  (calculée plus tôt), mais les calculs auraient été plus lourds car  $S_N$  peut prendre 20 valeurs.

**Exemple 2.3.6.** La moyenne et l'écart-type observés pour le nombre de réclamations dans les 10 derniers mois sont 6.7 et 2.3. La moyenne et l'écart-type pour la taille des réclamations est de 179 247 et 52 141. Alors la moyenne et l'écart-type pour la perte agrégée est

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S] &= 6.7 \times 179\,247 = 1\,200\,955 \\ \text{Var}(S) &= 6.7 \times (52\,141)^2 + (2.3)^2 \times (179\,247)^2 \\ \sqrt{\text{Var}(S)} &= 433\,797\end{aligned}$$

On souhaite approcher  $\mathbb{P}(S > 1,4 \times 1\,200\,955)$ .

En utilisant l'approximation normale :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S > 1,4 \times 1\,200\,955) &= \mathbb{P}\left(\frac{S - 1\,200\,955}{433\,797} > \frac{0,4 \times 1\,200\,955}{433\,797}\right) \\ &\simeq \mathbb{P}(Z > 1,107) = 0.134 \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1).\end{aligned}$$

En utilisant l'approximation Log-Normale :  $S \simeq X$  avec  $X \sim \text{Log-Normale}(\mu, \sigma^2)$ .

Cherchons les coefficients  $\mu, \sigma^2$  convenables :

$$\begin{aligned}e^{\mu + \sigma^2/2} &= 1\,200\,955 = e^{13.9986} \\ e^{2\mu + 2\sigma^2} &= (433\,797)^2 + (1\,200\,955)^2 = e^{28.1199}\end{aligned}$$

On obtient  $\mu = 13.9373$  et  $\sigma^2 = 0.1226$  et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S > 1,4 \times 1\,200\,955) &\simeq \mathbb{P}(X > 1681337) \\ &= 1 - \phi\left(\frac{\ln(1681337) - 13.9373}{\sqrt{0.1226}}\right) = 1 - \varphi(1.136) = 0.128.\end{aligned}$$

où  $\phi(x)$  est la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0,1)$ .

**2.3.4 Cas particulier : variables de Poisson composé**

On va utiliser les résultats généraux de la partie précédente pour trouver les propriétés d'une variable de Poisson composé.

**Définition 2.3.7.** Une variable de Poisson composé  $PC(\lambda, F_X)$  est un modèle agrégé de pertes où la fréquence suit une loi de Poisson :

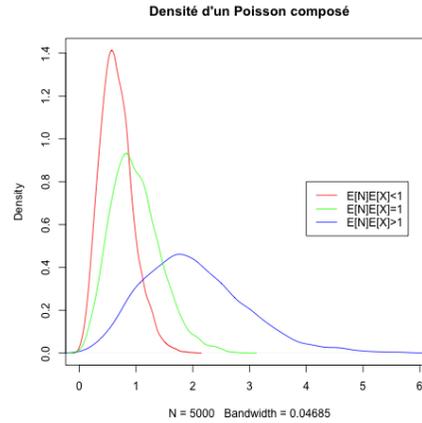
$$S = X_1 + \dots + X_N$$

avec

- les variables  $X_i$  sont i.i.d. de loi  $F_X$ ,
- $N$  suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ ,
- Les  $X_i$  et  $N$  sont indépendants.

**Exemple 2.3.8.** On suppose que la fréquence des pertes  $N$  suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$  et que la sévérité suit une loi exponentielle  $\mathcal{E}(\beta)$  de moyenne  $1/\beta$ . Alors  $S$  a pour densité

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} f_{\text{Gamma}(n,\beta)}(x) = e^{-\lambda-\beta x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\beta x)^n}{n!(n-1)!x}.$$



Densité d'un Poisson Composé dans le cas où la sévérité est exponentielle.

**Proposition 2.3.9.** Fonction génératrice des moments d'un PC

Si  $S \sim PC(\lambda, F_X)$ , alors

$$M_S(z) = e^{\lambda(M_X(z)-1)}$$

où  $M_X(z) = \mathbb{E}[e^{zX}]$  est la fonction génératrice des moments de  $X$ .

*Démonstration.* Il suffit de conditionner par  $N$  et utiliser le fait que la fonction génératrice d'une loi de Poisson vaut  $M_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} e^{zn} = e^{\lambda(e^z-1)}$ .  $\square$

**Exemple 2.3.10.** Si on suppose que  $X_i \sim \mathcal{E}(\beta)$ , alors

$$M_X(z) = \begin{cases} \frac{\beta}{\beta-z} & \text{si } z < \beta \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc  $M_S(z) = e^{\frac{\lambda z}{\beta-z}}$  si  $z < \beta$  et  $M_S(z) = \infty$  sinon.

**Propriété 2.3.11.** Moments d'un PC

$$\mathbb{E}[S] = \lambda\mathbb{E}[X], \quad \text{Var}(S) = \lambda\mathbb{E}[X^2] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3] = \lambda\mathbb{E}[X^3].$$

Le coefficient de dissymétrie de  $S_N$  est donc

$$\beta(S) = \frac{\lambda\mathbb{E}[X^3]}{\lambda^{3/2}\mathbb{E}[X^2]^{3/2}} = \frac{\mathbb{E}[X^3]}{\sqrt{\lambda}\mathbb{E}[X^2]^{3/2}}.$$

On remarque que si  $X$  prend des valeurs positives, alors  $\beta > 0$  (la queue de distribution est toujours étalée vers la droite).

*Démonstration.* On utilise le fait que si  $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ , alors  $\mathbb{E}[N] = \text{Var}(N) = \lambda$ .

De plus, en utilisant la fonction génératrice des moments d'une loi Poisson on a  $\mathbb{E}[(N - \mathbb{E}[N])^3] = \lambda$  et donc

$$\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3] = \lambda \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3] + 3\lambda \mathbb{E}[X] \text{Var}(X) + \lambda \mathbb{E}[X]^3 = \lambda \mathbb{E}[X^3].$$

Remarque : on peut directement calculer  $\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3]$  sans utiliser la formule précédente (qui est impossible à retenir !), en utilisant la fonction génératrice des moments de  $S$ . En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3] &= \mathbb{E}[S^3] - 3\mathbb{E}[S^2]\mathbb{E}[S] + 2\mathbb{E}[S]^3 \\ &= M_S^{(3)}(0) - 3\lambda \mathbb{E}[X] M_S''(0) + 2\lambda^3 \mathbb{E}[X]^3. \end{aligned}$$

Comme  $M_S(z) = e^{\lambda(M_X(z)-1)}$ ,  $M_S'(z) = \lambda M_X'(z) e^{\lambda(M_X(z)-1)}$ ,  $M_S''(z) = \lambda (M_X''(z) + \lambda M_X'(z)^2) e^{\lambda(M_X(z)-1)}$  et  $M_S^{(3)}(z) = \lambda (M_X^{(3)}(z) + 3\lambda M_X'(z) M_X''(z) + \lambda^2 M_X'(z)^3) e^{\lambda(M_X(z)-1)}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3] &= \lambda (\mathbb{E}[X^3] + 3\lambda \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[X^2] + \lambda^2 \mathbb{E}[X]^3) - 3\lambda^2 \mathbb{E}[X] (\mathbb{E}[X^2] + \lambda \mathbb{E}[X]^2) + 2\lambda^3 \mathbb{E}[X]^3 \\ &= \lambda \mathbb{E}[X^3]. \end{aligned}$$

□

**Exemple 2.3.12.** Si  $S \sim PC(\lambda, F_X)$  avec  $F_X(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{x+\beta}\right)^\alpha$  loi de Pareto( $\alpha, \beta$ ), avec  $\alpha > 3$ .

On sait que

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\beta}{\alpha - 1} \quad \mathbb{E}[X^2] = \frac{2\beta^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} \quad \mathbb{E}[X^3] = \frac{6\beta^3}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)}$$

et donc

$$\mathbb{E}[S] = \frac{\lambda\beta}{\alpha - 1} \quad \text{Var}(S) = \frac{2\lambda\beta^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} \quad \beta(S) = \frac{3\sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}}{\sqrt{2\lambda}(\alpha - 3)}.$$

**Propriété 2.3.13.** Somme de PC

Soient  $k \geq 1$  fixé et  $S_1, \dots, S_k$  des v.a. de Poisson composé indépendantes :  $S_i \sim PC(\lambda_i, F_i)$ . Alors  $S_1 + \dots + S_k$  est un PC( $\Lambda, F$ ) avec

$$\Lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i, \quad F(x) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^k \lambda_i F_i(x).$$

*Démonstration.* Calculons la fonction génératrice des moments de  $S = S_1 + \dots + S_k$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{zS}] &= \prod_{i=1}^k \mathbb{E}[e^{zS_i}] \quad \text{par indépendance} \\ &= \prod_{i=1}^k e^{\lambda_i(M_i(z)-1)} = \exp\left(\Lambda \left(\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\Lambda} M_i(z) - 1\right)\right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on remarque que  $\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\Lambda} M_i(z)$  est la fonction génératrice de la loi mélange  $F(x) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^k \lambda_i F_i(x)$ .

□

## 2.4 Prime Stop-Loss

Il est usuel d'appliquer une franchise sur le montant des pertes.

**Définition 2.4.1.** *Un contrat d'assurance avec une franchise  $d$  sur les pertes est appelé Stop-Loss. Son coût moyen est appelé prime stop-loss nette (stop-loss premium) et vaut*

$$\mathbb{E}[(S - d)_+] \quad \text{où } x_+ = \max(x, 0),$$

où  $S$  est le montant des sinistres.

On remarque que

$$\mathbb{E}[(S - d)_+] = \int_d^\infty (x - d) f_S(x) dx = \int_d^\infty [1 - F_S(x)] dx \quad \text{dans le cas où les pertes sont à densité,}$$

$$\mathbb{E}[(S - d)_+] = \sum_{x \geq d} (x - d) f_S(x) = \sum_{x \geq d} [1 - F_S(x)] \quad \text{dans le cas où les pertes sont discrètes.}$$

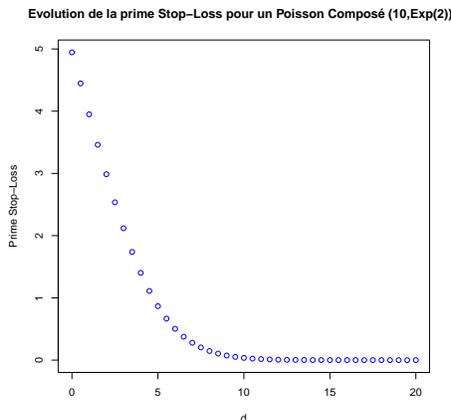
*Démonstration.* En effet, dans le cas à densité

$$\begin{aligned} \int_d^\infty [1 - F_S(x)] dx &= [(1 - F_S(x))(x - d)]_d^\infty + \int_d^\infty (x - d) f_S(x) dx \quad \text{par IPP avec } u = 1 - F_S(x) \text{ et } v = x - d \\ &= \int_d^\infty (x - d) f_S(x) dx. \end{aligned}$$

et dans le cas discret

$$\begin{aligned} \sum_{x \geq d} [1 - F_S(x)] &= \sum_{x \geq d} \mathbb{P}(S > x) = \sum_{x \geq d} \sum_{y > x} f_S(y) \\ &= \sum_{y > d} \sum_{d \leq x < y} f_S(y) = \sum_{y > d} (y - d) f_S(y) = \sum_{y \geq d} (y - d) f_S(y). \end{aligned}$$

□



**Théorème 2.4.2.** *Soit  $a < b$  tels que  $\mathbb{P}(a < S < b) = 0$ . Alors pour  $a \leq d \leq b$ , on a*

$$\mathbb{E}[(S - d)_+] = \frac{b - d}{b - a} \mathbb{E}[(S - a)_+] + \frac{d - a}{b - a} \mathbb{E}[(S - b)_+].$$

*La prime stop-loss peut être calculée par interpolation linéaire.*

*Démonstration.* L'hypothèse signifie que  $F_S(x) = F_S(a)$  pour tout  $x \in [a, b)$ . On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S - d)_+] &= \int_d^\infty (1 - F_S(x))dx \\ &= \mathbb{E}[(S - a)_+] - \int_a^d (1 - F_S(x))dx = \mathbb{E}[(S - a)_+] - (d - a)(1 - F_S(a)) \\ &= \mathbb{E}[(S - b)_+] + \int_d^b (1 - F_S(x))dx = \mathbb{E}[(S - b)_+] + (b - d)(1 - F_S(a))\end{aligned}$$

Par conséquent, en faisant la différence, on a  $(b - a)(1 - F_S(a)) = \mathbb{E}[(S - a)_+] - \mathbb{E}[(S - b)_+]$  et donc

$$\mathbb{E}[(S - d)_+] = \frac{d - a}{b - a} \mathbb{E}[(S - b)_+] + \frac{b - d}{b - a} \mathbb{E}[(S - a)_+].$$

La preuve dans le cas discret est similaire, il suffit de remarquer que :

$$\mathbb{E}[(S - d)_+] = \mathbb{E}[(S - a)_+] - \sum_{a \leq x < d} (1 - F_S(x)) = \mathbb{E}[(S - b)_+] + \sum_{d \leq x < b} (1 - F_S(x)).$$

□

### Exemple Assurance Dentaire

Reprenons l'exemple précédent. On souhaite calculer le prime stop-loss avec une franchise de 100\$, de 150\$, de 200\$ et enfin de 1800\$.

1. pour  $d = 1$  ( $S_N$  a été étudié en unité de 100\$) : on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S_N - 1)_+] &= \mathbb{E}[S_N - 1] - \sum_{x \leq 1} (x - 1)f_S(x) \\ &= 5.33 - 1 - (-1 \cdot f_S(0) + 0 \cdot f_S(1)) \\ &= 4.33 + 0.1 = 4.43 \text{ (unités de 100$)}.\end{aligned}$$

2. pour  $d = 2$  : on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S_N - 2)_+] &= \mathbb{E}[S_N - 2] - \sum_{x \leq 2} (x - 2)f_S(x) \\ &= 5.33 - 2 - (-2 \cdot f_S(0) - 1 \cdot f_S(1) - 0 \cdot f_S(2)) \\ &= 3.33 + 2 \times 0.1 + 1 \times 0.05 = 3.58.\end{aligned}$$

3. pour  $d = 1,5$  : on a  $\mathbb{P}(1 < S < 2) = 0$  ( $S$  est à valeurs entières), par conséquent

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S_N - 1.5)_+] &= 0.5\mathbb{E}[(S_N - 1)_+] + 0.5\mathbb{E}[(S_N - 2)_+] \\ &= 4.005\end{aligned}$$

4. pour  $d = 18$  : on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S_N - 18)_+] &= \sum_{x > 18} (x - 18)f_S(x) = f_S(19) + 2 \cdot f_S(20) \\ &= 1,6875 \times 10^{-5}\end{aligned}$$

**Remarque 2.4.3.** Dans le cas discret, si on suppose  $S_N$  à valeurs dans  $\{0, h, 2h, 3h, \dots\}$  pour  $h > 0$  fixé. On note  $f_k = \mathbb{P}(S = kh)$ . alors

$$\mathbb{E}[(S - (k+1)h)_+] = \mathbb{E}[(S - kh)_+] - h(1 - F_S(kh)).$$

Cette remarque permet de calculer la prime stop-loss pas à pas dans le cas discret. On a bien dans l'exemple précédent,

$$\mathbb{E}[(S_N - 2)_+] = \mathbb{E}[(S_N - 1)_+] - (1 - F_{S_N}(1)) = 4.43 - (1 - 0.1 - 0.05) = 3.58.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S - kh)_+] &= \sum_{x \geq kh} (x - kh) f_k \\ &= \sum_{i \geq k} (ih - kh) f_k = h \sum_{i \geq k+1} (i - k) f_k = h \sum_{i \geq k+1} \sum_{j=0}^{i-k-1} f_k \\ &= h \sum_{j \geq 0} \sum_{i \geq k+j+1} f_k = h \sum_{j \geq 0} [1 - F_S((k+j)h)] \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}[(S - kh)_+] = h(1 - F_S(kh)) + h \sum_{j \geq 1} [1 - F_S((k+j)h)] = h(1 - F_S(kh)) + \mathbb{E}[(S - (k+1)h)_+].$$

□

## 2.5 Résultats analytiques : calculs explicites et approximations de la loi de $S_N$

En général, la fonction de répartition de  $S_N$  est difficilement calculable. Cependant, il existe certains cas où on a des résultats analytiques plus ou moins faciles à utiliser.

**Exemple 2.5.1.** Si  $N$  suit une géométrie  $\mathcal{G}(\beta)$  et  $X$  suit une exponentielle de moyenne  $\theta$

La fonction génératrice de  $N$  est

$$M_N(z) = \frac{1}{1 - \beta(e^z - 1)}$$

et celle de  $X$  est

$$M_X(z) = \frac{1}{1 - \theta z} \quad \text{si } z < 1/\theta$$

Alors

$$\begin{aligned} M_{S_N}(z) &= M_N(\ln(M_X(z))) = \frac{1 - \theta z}{1 - \theta(1 + \beta)z} = \frac{(1 + \beta)(1 - \theta z)}{(1 + \beta)(1 - \theta(1 + \beta)z)} \\ &= \frac{1}{(1 + \beta)} + \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{1}{1 - \theta(1 + \beta)z} \end{aligned}$$

Ceci est la fonction génératrice des moments d'une loi connue. Il s'agit en fait du mélange qui vaut 0 avec probabilité  $1/(\beta + 1)$  et qui vaut  $E$  avec probabilité  $\beta/(\beta + 1)$  et  $E$  suit une loi exponentielle de moyenne  $\theta(\beta + 1)$ .

La variable  $S_N \stackrel{\text{Loi}}{=} Z \times E$  où  $Z \sim \text{Bernoulli}$  de paramètre  $\beta/(\beta + 1)$  et  $E \sim \text{Exp}$  de moyenne  $\theta(\beta + 1)$  avec  $Z$  et  $E$  indépendantes.

La fonction de répartition d'une telle variable est, pour  $x \geq 0$

$$F_{S_N}(x) = \frac{1}{(1 + \beta)} + \frac{\beta}{\beta + 1} (1 - e^{-\frac{x}{\theta(\beta + 1)}}) = 1 - \frac{\beta}{\beta + 1} e^{-\frac{x}{\theta(\beta + 1)}}.$$

### 2.5.1 Lois fermées pour la convolution

**Définition 2.5.2.** La loi  $f_X(x, \alpha)$  d'une variable  $X$  est dite fermée pour la convolution si la loi de la somme de  $n$  variables indépendantes de loi  $f_X(x, \alpha)$  est  $f_X(x, n\alpha)$ , i.e.  $f_X(x, \alpha)^{*n} = f_X(x, n\alpha)$  (on reste dans la même famille).

**Exemple 2.5.3.** La loi Gamma, la loi binomiale négative et la loi Normale sont fermées pour la convolution.

**Exemple 2.5.4.** L'inverse Gaussienne est fermée pour la convolution

*Démonstration.* On considère l'inverse Gaussienne  $IG(\delta, \gamma)$ . On souhaite montrer que si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables indépendantes de loi  $IG(\delta, \gamma)$ , alors  $X_1 + \dots + X_n$  a pour loi  $IG(n\delta, \gamma)$ .

La fonction génératrice des moments d'une  $IG(\delta, \gamma)$  est

$$\begin{aligned} M_X(z) &= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{\delta\gamma} \int_0^\infty e^{zx} x^{-3/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\delta^2 x^{-1} + \gamma^2 x)\right] dx \\ &= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{\delta\gamma} \int_0^\infty x^{-3/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\delta^2 x^{-1} + (\gamma^2 - 2z)x)\right] dx \\ &= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{\delta\gamma} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{\delta} e^{\delta\sqrt{\gamma^2 - 2z}} \int_{\mathbb{R}} f_{IG(\delta, \sqrt{\gamma^2 - 2z})}(x) dx \\ &= e^{\delta(\sqrt{\gamma^2 - 2z} + \gamma)} \quad \text{pour } z < \gamma^2/2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$M_{X_1+\dots+X_n}(z) = (M_X(z))^n = e^{n\delta(\sqrt{\gamma^2-2z}+\gamma)} \quad \text{pour } z < \gamma^2/2.$$

Par conséquent,  $X_1 + \dots + X_n \sim IG(n\delta, \gamma)$ . □

Les calculs numériques de la loi d'une somme agrégée sont plus simples lorsque

- $N$  prend un nombre fini de valeurs (par exemple, loi Binomiale),
- la loi de  $X$  est fermée pour la convolution.

## 2.5.2 Méthode d'inversion

Il est en général plus facile de calculer la fonction génératrice de  $S$  que sa densité. On va voir une méthode d'inversion permettant de trouver la loi de  $S$  à partir non pas de sa fonction génératrice, mais de sa transformée de Fourier.

La transformée de Fourier de  $S$  est définie par

$$\hat{f}_S(z) = \mathbb{E}[e^{izS}] = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} f_S(x) dx = M_S(iz) \quad \text{avec } z \in \mathbb{R}.$$

Le théorème de Lévy stipule que si la transformée de Fourier  $\hat{f}_S$  est intégrable, alors

$$f_S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} \hat{f}_S(z) dz.$$

Il existe différentes méthodes numériques pour calculer ce type d'intégrale. Cette méthode ne sera pas exploitée dans ce cours.

## 2.5.3 Algorithme de Panjer pour calculer la loi de $S_N$ pour des sévérités discrètes

On se place dans le cadre où  $N$  appartient à la famille  $(a, b, 0)$  et où  $X$  est discrète à valeurs dans  $\{0, 1, 2, \dots, m\}$  ( $m$  peut être  $\infty$ ). On va montrer qu'on a alors une formule récursive pour calculer  $f_{S_N}$ . Comme  $N$  appartient à la famille  $(a, b, 0)$ ,  $p_n = \mathbb{P}(N = n)$  vérifie

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

La loi de  $S_N$  est définie comme la somme pondérée des convolées de la loi de  $X$  :

$$f_{S_n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x) \quad \text{avec } f_X^{*n}(x) = \sum_{y=0}^x f_X(y) f_X^{*(n-1)}(x-y).$$

Faisons d'abord deux remarques :

$$\mathbb{E}[X_1 | \sum_{i=1}^n X_i = x] = \frac{x}{n}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = y | \sum_{i=1}^n X_i = x) = \frac{f_X(y) f_X^{*(n-1)}(x-y)}{f_X^{*n}(x)} \quad \text{pour } y \in \{0, 1, \dots, x\}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
n\mathbb{E}[X_1 | \sum_{i=1}^n X_i = x] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i | \sum_{i=1}^n X_i = x] = x \quad \text{car les } X_i \text{ sont de même loi,} \\
\mathbb{P}(X_1 = y | \sum_{i=1}^n X_i = x) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = y, \sum_{i=2}^n X_i = x - y)}{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i = x)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_1 = y)\mathbb{P}(\sum_{i=2}^n X_i = x - y)}{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i = x)} \quad \text{par indépendance entre les } X_i \\
&= \frac{f_X(y)f_X^{*(n-1)}(x - y)}{f_X^{*n}(x)}.
\end{aligned}$$

On obtient par conséquent, pour  $x \geq 1$

$$\begin{aligned}
f_{S_N}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a + \frac{b}{n}) p_{n-1} f_X^{*n}(x) \quad \text{car pour } x \geq 1, f_X^{*0}(x) = 0 \\
&= a \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} f_X^{*n}(x) + b \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{X_1}{x} \mid \sum_{i=1}^n X_i = x\right] p_{n-1} f_X^{*n}(x) \\
&= a \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} \sum_{y=0}^x f_X(y) f_X^{*(n-1)}(x - y) + b \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y=0}^x \frac{y}{x} \frac{f_X(y) f_X^{*(n-1)}(x - y)}{f_X^{*n}(x)} p_{n-1} f_X^{*n}(x) \\
&= a \sum_{y=0}^x f_X(y) \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} f_X^{*(n-1)}(x - y) + b \sum_{y=0}^x \frac{y}{x} f_X(y) \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} f_X^{*(n-1)}(x - y) \\
&= a \sum_{y=0}^x f_X(y) f_{S_N}(x - y) + b \sum_{y=0}^x \frac{y}{x} f_X(y) f_{S_N}(x - y) \\
&= a f_X(0) f_{S_N}(x) + \sum_{y=1}^x \left[ a + \frac{y}{x} \right] f_X(y) f_{S_N}(x - y)
\end{aligned}$$

**Proposition 2.5.5.** *Si  $N$  appartient à la famille  $(a, b, 0)$  et si  $X$  est à valeurs discrètes, alors pour tout  $x \geq 1$*

$$f_{S_N}(x) = \frac{1}{1 - a f_X(0)} \sum_{y=1}^x \left[ a + b \frac{y}{x} \right] f_{S_N}(x - y) f_X(y).$$

On peut donc calculer  $f_{S_N}(x)$  pour  $x \geq 1$  de façon récursive :

$$\begin{aligned}
f_{S_N}(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n (f_X(0))^n \\
f_{S_N}(1) &= \frac{1}{1 - a f_X(0)} (a + b) f_{S_N}(0) f_X(1) \\
f_{S_N}(2) &= \frac{1}{1 - a f_X(0)} [(a + b/2) f_{S_N}(1) f_X(1) + (a + b) f_{S_N}(0) f_X(2)] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

**Remarque 2.5.6.**

— Si  $m$  est fini, alors  $f_X(y) = 0$  pour  $y > m$  et donc la formule se réécrit

$$f_{S_N}(x) = \frac{1}{1 - af_X(0)} \sum_{y=1}^{x \wedge m} \left[ a + b \frac{y}{x} \right] f_{S_N}(x-y) f_X(y)$$

où  $x \wedge m = \min(x, m)$ .

- Si  $f_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = 0$ , alors  $f_{S_N}(0) = p_0 = \mathbb{P}(N = 0)$ .
- Si  $f_{S_N}(0)$  est très petite au point que la calculatrice lui associe la valeur 0, alors en utilisant cette méthode la calculatrice donnera  $f_{S_N}(x) = 0$  pour tout  $x \geq 1$ !!! (ce qui est impossible car  $\sum_{x \geq 0} f_{S_N}(x) = 1$ ). On ne peut pas appliquer la formule récursive directement. On verra plus tard un moyen de contourner ce problème dans le cadre des v.a. de Poisson composé.
- Un autre inconvénient de cette méthode est qu'on accumule au fur et à mesure les erreurs d'arrondi. Notamment si  $N$  suit une loi binomiale ( $a < 0$ ) et on pourrait se retrouver avec des probabilités négatives à cause des erreurs d'arrondi.

**Exemple 2.5.7.** Supposons que  $N$  suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ .  $N$  est dans la famille  $(a, b, 0)$  avec  $a = 0$  et  $b = \lambda$ . Par conséquent

$$f_{S_N}(x) = \frac{\lambda}{n} \sum_{y=1}^x x f_{S_N}(x-y) f_X(y).$$

**Application 2.5.8.** *Double composition*

Lorsqu'on regarde le cas des réclamations pour des polices couvrant plusieurs individus, la fréquence est elle même un modèle composé. Par exemple, on pourrait imaginer que chaque police couvre au maximum  $n$  personnes qui ont chacune une probabilité  $q$  d'avoir un sinistre :

$$N = \sum_{i=1}^M \bar{N}_i \quad \text{avec } M \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ et } \bar{N}_i \sim \text{Binomiale}(n, q)$$

où  $N_i$  est le nombre de réclamations de la police  $i$  et  $M$  le nombre de police.

$N$  est un  $PC(\lambda, \text{Binomiale}(n, q))$  et n'est pas dans la famille  $(a, b, 0)$ . On ne pas utiliser directement la formule récursive.

Par contre, en découpant selon chaque police d'assurance, on a

$$S_N = \sum_{j=1}^N X_j \stackrel{(loi)}{=} \sum_{i=1}^M \bar{S}_i \quad \text{avec } \bar{S}_i = \sum_{j=1}^{\bar{N}_i} X_j.$$

Comme  $\bar{N} \sim \text{Binomiale}(n, q)$  il appartient à la famille  $(a, b, 0)$ , on peut donc utiliser la formule récursive pour calculer la loi de  $\bar{S}$  avec  $a = -q/(1-q)$  et  $b = (n+1)q/(1-q)$ . Puis, comme  $M$  appartient aussi à la famille  $(a, b, 0)$  avec  $a = 0$  et  $b = \lambda$ , on en déduit la loi de  $S$ .

**Exemple 2.5.9.** Plaçons nous dans le cadre de l'application précédente en supposant que  $X$  ne prenne que deux valeurs

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/2$$

et que  $\bar{N} \sim \text{Binomiale}(n = 2, q = 1/2)$  et  $M \sim \mathcal{P}(1)$ .  $\bar{S}$  est à valeurs dans  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  et  $a = -1$  et  $b = 3$

$$f_{\bar{S}}(0) = \mathbb{P}(\bar{N} = 0) = 1/2^2 = 1/4$$

$$f_{\bar{S}}(1) = 2.1/4.1/2 = 1/4$$

$$f_{\bar{S}}(2) = (-1 + 3/2).1/4.1/2 + 2.1/4.1/2 = 5/16$$

$$f_{\bar{S}}(3) = (-1 + 1).5/16.1/2 + (-1 + 2)1/4.1/2 = 1/8$$

$$f_{\bar{S}}(4) = (-1 + 3/4).1/8.1/2 + (-1 + 6/4).5/16.1/2 = -1/64 + 5/64 = 1/16.$$

$S_N$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , avec  $a = 0$  et  $b = 1$

$$f_S(0) = e^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!4^m} = e^{-3/4} = 0.4723$$

$$f_S(1) = f_S(0)f_{\bar{S}}(1) = \frac{1}{4}e^{-3/4} = 0.1181$$

$$f_S(2) = \frac{1}{2}(f_S(1)f_{\bar{S}}(1) + 2f_S(0)f_{\bar{S}}(2)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} + \frac{10}{16}\right)e^{-3/4} = \frac{11}{32}e^{-3/4} = 0.1624$$

$$f_S(3) = \frac{1}{3}(f_S(2)f_{\bar{S}}(1) + 2f_S(1)f_{\bar{S}}(2) + 3f_S(0)f_{\bar{S}}(3)) = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{128} + \frac{10}{64} + \frac{3}{8}\right)e^{-3/4} = \frac{79}{384}e^{-3/4} = 0.0972$$

⋮

$$f_S(x) = \frac{1}{n} \sum_{y=1}^{x \wedge 4} x f_S(x-y) f_{\bar{S}}(y)$$

**Remarque 2.5.10.** Supposons que  $N$  suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$  et que  $f_S(0)$  est très proche de zéro. Pour pouvoir tout de même utiliser la formule récursive, on fixe  $k \geq 1$  et on définit  $N^* \sim \mathcal{P}(\lambda^*)$  avec  $\lambda^* = \lambda/2^k$ .

On remarque que  $N$  est la somme de  $2^k$  variables  $N^*$  indépendantes.

On applique la formule récursive avec  $N^*$  pour calculer la loi de  $S^* = \sum_{i=1}^{N^*} X_i$  et en utilisant la double composition on obtient la loi de  $S \stackrel{(loi)}{=} \sum_{j=1}^{2^k} S_j^*$  avec  $S_j^*$  i.i.d. de même loi que  $S^*$  en calculant les convolées successives de  $f_{S^*}$  via la formule :

$$f_{S^{*n}}(x) = \sum_{y \geq 0} f_{S^*}(y) f_{S^{*(n-1)}}(x-y).$$

Plus  $k$  est grand plus la valeur de  $f_{S^*}(0)$  sera grande. Il faut donc choisir  $k$  suffisamment grand pour que  $f_{S^*}(0)$  soit assez grand, mais pas trop grand afin que le calcul de la loi de  $\sum_{j=1}^{2^k} S_j^*$  ne soit pas trop pénible.

**Exemple 2.5.11.** Supposons que  $N \sim \mathcal{P}(1)$  et  $X$  de loi

$x$	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	1/4	1/4	5/16	1/8	1/16

On a  $f_S(0) = e^{-3/4} = 0.4723$ . Même si  $f_S(0)$  est suffisamment grand, on va utiliser la remarque précédente avec  $k = 1$ .

On a  $f_{S^*}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (1/4)^n \frac{(1/2)^n}{n!} e^{-1/2} = e^{1/8-1/2} = e^{-3/8} = 0.6873$ , qui est bien plus grand que  $f_S(0)$ . En utilisant R, on calcule la loi de  $S^*$

$x$	0	1	2	3	4	...
$f_{S^*}(x)$	0.6873	0.0859	0.1127	0.0566	0.0361	...

Pour trouver la loi de  $S = S_1^* + S_2^*$  avec  $S_1^*$  et  $S_2^*$  indépendantes de même loi que  $S^*$ , on utilise R :

$x$	0	1	2	3	4	...
$f_S(x)$	0.4724	0.1181	0.1624	0.0972	0.0720	...

## 2.5.4 Généralisation de l'algorithme de Panjer à des sévérités continues

Supposons que  $N$  appartient à la famille  $(a, b, 0)$  et que  $X$  suit une loi  $f_X$  sur  $\mathbb{R}^+$ . On peut montrer que la densité de  $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$  vérifie

$$f_{S_N}(x) = p_1 f_X(x) + \int_0^x \left[ a + b \frac{y}{x} \right] f_X(y) f_{S_N}(x-y) dy.$$

Cette formule est beaucoup moins exploitable que dans le cas discret. Il existe cependant des méthodes numériques pour trouver une approximation de la solution de ce type d'équation, méthodes que nous ne verrons pas.

L'idée qu'on va plutôt utiliser est la suivante :

- on discrétise la loi de  $X$  (*on parle d'arithmétisation des lois continues*),
- on applique la formule de Panjer avec la loi discrétisée de  $X$ .

Le but de cette section est d'expliquer la discrétisation de lois continues par différentes méthodes.

Notations :

- Si  $F_X$  est la fonction de répartition de la variable  $X$ , alors

$$F_X(x^-) = \mathbb{P}(X < x).$$

- Soit  $h$  une fonction et  $F_X$  une fonction de répartition, on note

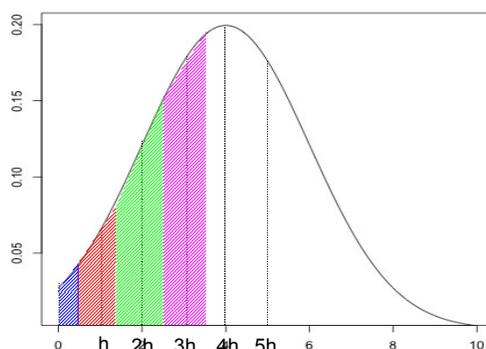
$$\int_u^{v^-} h(x) dF_X(x) = \int_{[u,v)} h(x) dF_X(x).$$

Si  $F_X$  est la fonction de répartition d'une loi à densité  $f_X$ , on a alors

$$\int_u^{v^-} h(x) dF_X(x) = \int_u^v h(x) f_X(x) dx.$$

### Méthode des arrondis

On note  $F_X$  la fonction de répartition de  $X$ . On choisit le pas de discrétisation  $h > 0$ . On approche la loi  $F_X$  par une loi discrète sur  $\{0, h, 2h, \dots\}$ .



On définit

$$\begin{aligned} f^h(0) &= \mathbb{P}(X < \frac{h}{2}) = F_X(h/2-) \\ f^h(h) &= \mathbb{P}(\frac{h}{2} \leq X < h + \frac{h}{2}) = F_X((h + h/2)-) - F_X(h/2-) \\ &\vdots \\ f^h(jh) &= \mathbb{P}(jh - \frac{h}{2} \leq X < jh + \frac{h}{2}) = F_X((jh + h/2)-) - F_X((jh - h/2)-) \end{aligned}$$

On remarque que l'on a bien

$$\sum_{j=0}^{\infty} f^h(j) = \sum_{j=0}^{\infty} F_X((jh + h/2)-) - F_X((jh - h/2)-) = \lim_{j \rightarrow \infty} F_X((jh + h/2)-) = 1.$$

**Exemple 2.5.12.** Si  $X$  suit la loi  $\mathcal{Exp}(0.1)$ . On choisit  $h = 2$ , on a alors

$$\begin{aligned} f^h(0) &= \mathbb{P}(X < 1) = 1 - e^{-0.1} \\ f^h(2) &= \mathbb{P}(1 \leq X < 3) = e^{-0.1} - e^{-0.3} \\ &\vdots \\ f^h(2j) &= \mathbb{P}(2j - 1 \leq X < j + 1) = e^{-0.1(2j-1)} - e^{-0.1(2j+1)} \end{aligned}$$

On trouve

$x = 2j$	0	2	4	6	...
$f^2(x)$	0.09516258	0.16401920	0.13428756	0.10994536	...

Plus on garde de décimal dans l'approximation de  $f_X$  meilleur est cette méthode. Le grand intérêt de cette méthode est qu'elle est très facilement implémentable avec n'importe quel logiciel.

### Méthode des moments

*Attention cafouillage : il se peut que la notation du cours soit légèrement de celle des notes pour les poids :  $m_j^k, m_k^j \dots$*

On choisit  $p > 0$  et  $h > 0$ .

On va construire une loi discrète dont ses moments jusqu'à l'ordre  $p$  correspondent aux moments de la loi initiale des sévérités.

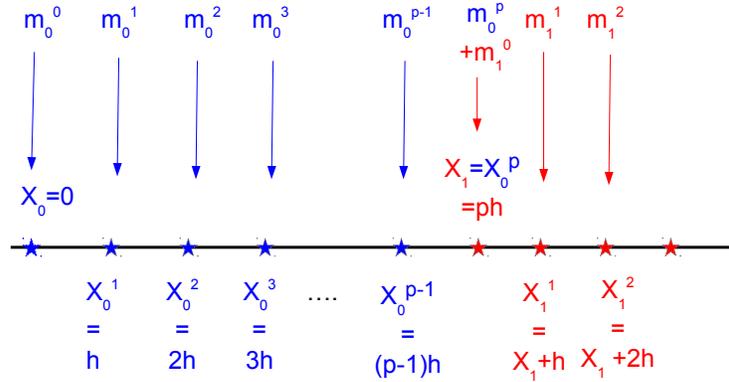
Considérons un intervalle arbitraire de longueur  $ph : [x_k, x_k + ph)$ , avec  $h > 0$  fixé.

On associe au point  $x_k, x_k + h, x_k + 2h, \dots, x_k + ph$  les poids  $m_k^0, m_k^1, m_k^2, \dots, m_k^p$  de tel manière que les  $p$  premiers moments sur l'intervalle  $[x_k, x_k + ph)$  soient préservés :

$$\sum_{j=0}^p (x_k + jh)^r m_k^j = \int_{x_k}^{x_k + ph} x^r dF_X(x) \quad \text{pour } r = 0, 1, \dots, p.$$

On pose  $x_0 = 0$  et  $x_{k+1} = x_k + ph$  (i.e.  $x_k = kph$ ). À chaque point on associe les poids suivants

$$\begin{array}{llll} x_0 = 0 \leftarrow f^h(0) = m_0^0 & x_1 = x_0 + ph \leftarrow f^h(p) = m_0^p + m_1^0 & x_2 = x_1 + ph \leftarrow f^h(2p) = m_1^p + m_2^0 & \dots \\ x_0 + h \leftarrow f^h(1) = m_0^1 & x_1 + h \leftarrow f^h(p+1) = m_1^1 & x_2 + h \leftarrow f^h(2p+1) = m_2^1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0 + (p-1)h \leftarrow f^h(p-1) = m_0^{p-1} & x_1 + (p-1)h \leftarrow f^h((2p-1)h) = m_1^{p-1} & x_2 + (p-1)h \leftarrow f^h((3p-1)h) = m_2^{p-1} & \dots \end{array}$$



Vérifions que les  $p$  premiers moments de la loi discrétisée  $f^h$  sont égaux à ceux de la loi  $F_X$ . Soit  $r \leq p$ , on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^r dF_X(x) &= \sum_{k=0}^\infty \int_{x_k}^{x_{k+1}^-} x^r dF_X(x) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=0}^p (x_k + jh)^r m_k^j \\ &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=0}^{p-1} (x_k + jh)^r f^h(kp + j). \end{aligned}$$

Il reste maintenant à trouver les valeurs  $m_k^j$  qui vérifient la relation

$$\sum_{j=0}^p (x_k + jh)^r m_k^j = \int_{x_k}^{x_{k+1}^-} x^r dF_X(x) \quad \text{pour } r = 0, 1, \dots, p.$$

**Proposition 2.5.13.** *On a*

$$m_k^j = \int_{x_k}^{x_{k+1}^-} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^p \frac{x - x_k - ih}{(j - i)h} dF_X(x) \quad j = 0, 1, \dots, p.$$

De manière général on utilise cette discrétisation avec  $p = 1, 2$  ou  $3$ .

*Démonstration.* Soit  $g$  une fonction qui passe par les points  $(y_0, g(y_0)), (y_1, g(y_1)), \dots, (y_n, g(y_n))$ . Le polynôme de Lagrange  $P_g$  est le seul polynôme de degré au plus  $n$  qui approche la fonction  $g$  en passant par les points  $(y_0, g(y_0)), (y_1, g(y_1)), \dots, (y_n, g(y_n))$  :

$$P_g(y) = \sum_{j=0}^n g(y_j) \prod_{i \neq j} \frac{y - y_i}{y_j - y_i}.$$

On utilise cette approximation pour la fonction polynomiale  $g(y) = y^r$  avec les  $y_j = x_k + jh$ ,  $j = 0, \dots, p$  : pour  $y \in [x_k, x_k + ph)$

$$P_r(y) = y^r = \sum_{j=0}^p (x_k + jh)^r \prod_{i \neq j} \frac{y - x_k - ih}{(j - i)h}$$

On intègre par rapport à la loi de  $X$  sur  $[x_k, x_k + ph)$  et on obtient

$$\int_{x_k}^{x_k+ph-} y^r dF_X(y) = \sum_{j=0}^p (x_k + jh)^r \underbrace{\int_{x_k}^{x_k+ph-} \prod_{i \neq j} \frac{y - x_k - ih}{(j - i)h} dF_X(y)}_{m_k^j}$$

□

**Exemple 2.5.14.** Si  $X$  suit la loi  $\mathcal{Exp}(0.1)$ . On va utiliser la méthode avec  $p = 1$  et  $h = 2$ . On a donc

$$x_0 = 0 \leftarrow f^h(0) = m_0^0, \quad x_1 = 2 \leftarrow f^h(1) = m_0^1 + m_1^0, \quad \dots, \quad x_k = 2k \leftarrow f^h(k) = m_{k-1}^1 + m_k^0, \dots$$

Calculons les valeurs  $m_k^j$  :

$$m_k^0 = \int_{2k}^{2k+2} \frac{x - 2k - 2}{-2} 0.1e^{-0.1x} dx = \left[ \left( \frac{x - 2k - 2}{2} + \frac{1}{0.2} \right) e^{-0.1x} \right]_{2k}^{2k+2} = 5e^{-0.1(2k+2)} - 4e^{-0.1 \times 2k}$$

$$m_k^1 = \int_{2k}^{2k+2} \frac{x - 2k}{2} 0.1e^{-0.1x} dx = \left[ \left( -\frac{x - 2k}{2} - \frac{1}{0.2} \right) e^{-0.1x} \right]_{2k}^{2k+2} = -6e^{-0.1(2k+2)} + 5e^{-0.1 \times 2k}$$

On a par conséquent

$x = 2k$	0	2	4	6	...
$f^2(x)$	$m_0^0$	$m_0^1 + m_1^0$	$m_1^1 + m_2^0$	$m_2^1 + m_3^0$	...
	= 0.09365377	= 0.16429270	= 0.13451149	= 0.11012869	

Cette méthode de discrétisation est meilleur que la première dans le sens où elle approche la loi continue sans biais sur les  $p$  premiers moments, mais elle est malheureusement plus compliquée à implémenter.

Dans le package "actuar" de R, il y a la fonction *discretize* qui permet de discrétiser une loi continue avec différentes méthodes : *upper* qui correspond à la méthode des arrondis par valeur supérieur, *lower* qui correspond à la méthode des arrondis par valeur inférieur, *rounding* qui correspond à la méthode des arrondis comme expliquée ici et enfin *unbiased* qui correspond à la méthode des moments avec  $p = 1$ .

## 2.6 Influence de la police d'assurance sur les pertes agrégées

Le nombre de pertes considérées et le montant des paiements effectués par un assureur dépendent des termes du contrat d'assurance (par exemple de la franchise, du taux maximal de remboursement, etc. . .).

On introduit

- $N$  le nombre des pertes,
- $N^P$  le nombre de paiements,
- $X_j$  le montant de la perte  $j$  et
- $Y_j$  le montant du paiement pour la  $j^{\text{ème}}$  perte.

On va dans cette partie s'intéresser aux variables  $N^P$  et  $Y_j$ .

**Exemple 2.6.1.** Si la police d'assurance comprend juste une franchise  $d$ , alors une perte a une probabilité  $\mathbb{P}(X > d)$  d'avoir un paiement. Il y a des pertes qui n'auront pas de paiement.

Par ailleurs, le paiement sera  $Y = (X - d)_+$  pour une perte valant  $X$ . (Voir l'exemple 2.1.2 de ce chapitre).

### 2.6.1 Nombre et montant des paiements

Notons  $v = \mathbb{P}($  la perte  $X$  induit un paiement  $Y)$  la probabilité d'avoir un paiement et  $g$  la fonction qui donne la valeur du paiement en fonction du montant de la perte :

$$Y = g(X).$$

On introduit les variables  $I_j = \mathbb{1}_{Y_j > 0} = \begin{cases} 0 & \text{si } Y_j = 0 \\ 1 & \text{si } Y_j > 0 \end{cases}$  pour chaque paiement  $Y_j$ . La variable  $I$  suit une loi *Bernoulli*( $v$ ). Le nombre total de paiements est donc

$$N^P = \sum_{j=1}^N I_j.$$

Dans un modèle de pertes agrégées le nombre de perte  $N$  et les montants des pertes  $X_j$  sont (en général) supposés indépendants. Par conséquent, les variables  $N$  et  $I_j$  sont indépendantes et  $N^P$  est une somme composée.

On remarque que

$$\mathbb{E}[N^P] = v\mathbb{E}[N].$$

La fonction génératrice des moments de  $N^P$  est donnée par :

$$M_{N^P}(z) = \mathbb{E}[e^{zN^P}] = \mathbb{E}[(1 + v(e^z - 1))^N].$$

**Exemple 2.6.2.** Supposons que  $N \sim BN(r = 2, \beta = 3)$  et  $X \sim Pareto(\alpha = 3, \theta = 1000)$ . On considère une police avec une franchise  $d = 250\$$ . Par conséquent :

$$Y = (X - 250)_+ \quad \text{et} \quad v = \mathbb{P}(X > 250) = \left( \frac{1000}{1000 + 250} \right)^3 = 0.512.$$

Comme  $N \sim BN(r = 2, \beta = 3)$ ,

$$P_N(z) = \mathbb{E}[z^N] = \left( \frac{1}{1 - 3(z - 1)} \right)^2$$

la fonction génératrice du nombre de paiements est :

$$M_{N^P}(z) = \left( \frac{1}{1 - 3v(e^z - 1)} \right)^2.$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi  $BN(r = 2, \beta^* = 3v)$ . Ce résultat est logique car une loi Binomiale négative représente le nombre d'échecs nécessaires pour avoir  $r$  succès. En introduisant une franchise, on a juste modifié la probabilité d'avoir un succès.

Le nombre moyen de pertes est  $\mathbb{E}[N] = r\beta = 6$  alors que le nombre moyen de paiements est  $\mathbb{E}[N^P] = 6v = 3,072$ .

Si jamais la compagnie décide de passer d'une franchise de 250\$ à 500\$, le nombre moyen de paiements sera alors

$$\mathbb{E}[N^P] = 6 * \left( \frac{1000}{1000 + 500} \right)^3 = 1,778.$$

## 2.6.2 Paiements effectifs

On peut vouloir ne s'intéresser qu'aux paiements effectifs :  $Y^P = Y|Y > 0$ . On a  $\mathbb{P}(Y^P = 0) = 0$ .

Nos données ne concernent alors que les pertes qui ont donné lieu à un paiement (on n'est pas au courant des pertes qui n'ont pas enclenché de paiement.)

Étudions la loi de  $Y^P$  :

$$\begin{aligned} F_{Y^P}(y) &= \mathbb{P}(Y^P \leq y) = \mathbb{P}(Y \leq y | Y > 0) \\ &= \frac{\mathbb{P}(0 < Y \leq y)}{\mathbb{P}(Y > 0)} = \frac{\mathbb{P}(Y \leq y) - \mathbb{P}(Y = 0)}{v} \\ &= \frac{1}{v} F_Y(y) - \frac{(1-v)}{v}. \\ M_{Y^P}(z) &= \mathbb{E}[e^{zY} | Y > 0] = \frac{1}{v} M_Y(z) - \frac{1-v}{v} \end{aligned}$$

**Exemple 2.6.3.** Considérons une police avec une franchise  $d = 2$ . On suppose que le montant des pertes  $X \sim \mathcal{Exp}$  de moyenne  $\theta = 10$ . On a

$$Y = g(X) = (X - 2)_+.$$

Cherchons la loi de  $Y^P$ . On a  $v = \mathbb{P}(X > 2) = e^{-0.2}$ . Par ailleurs, pour  $y \geq 0$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}((X - 2)_+ \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y + 2) = 1 - e^{-\frac{y+2}{10}}$$

et donc

$$F_{Y^P}(y) = e^{0.2} \left( 1 - e^{-\frac{y+2}{10}} \right) - e^{0.2} (1 - e^{-0.2}) = 1 - e^{-\frac{y}{10}}$$

On remarque que  $Y^P \sim \mathcal{Exp}$  de moyenne 10.

**Remarque 2.6.4.** — Si on connaît  $X$  on peut connaître  $Y$  et  $Y^P$ .

— Si on connaît la loi de  $Y^P$ , on peut connaître  $Y$ .

Le paiements total des pertes s'écrit

$$S = \sum_{j=1}^N Y_j = \sum_{j=1}^{N^P} Y_j^P.$$

Si on regarde la loi de  $S$ , on a alors

$$M_S(z) = \mathbb{E}[M_Y(z)^N] = \mathbb{E}[(1 - v + vM_{Y^P}(z))^N] = \mathbb{E}[M_{Y^P}(z)^{N^P}]$$

Les pertes agrégées peuvent donc être modélisées en terme de  $Y$  ou de  $Y^P$ . Le choix dépendra des données disponibles et des calculs à faire.

**Exemple 2.6.5.** On suppose que le nombre de pertes suit une loi  $Poisson(\lambda = 3)$  et que le montant des pertes  $X \sim Pareto(\alpha = 4, \theta = 10)$ .

On considère une police d'assurance avec une franchise  $d = 6\$$  et qui rembourse 75% des pertes en l'excès. On souhaite trouver la loi des pertes agrégées et leur montant espéré.

1. Si on utilise  $S = \sum_{j=1}^N Y_j$  avec  $Y_j = 0.75(X_j - 6)_+$ , on a  $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[Y]$ , avec  $\mathbb{E}[N] = 3$  et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= 0.75\mathbb{E}[(X - 6)_+] \\ &= 0.75[\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X \wedge 6]] = 0.75[\mathbb{E}[X] - Lev_X(6)] \\ &= 0.75\left[\frac{\theta}{\alpha - 1} - \frac{\theta}{\alpha - 1}\left(1 - \left(\frac{\theta}{6 + \theta}\right)^{\alpha - 1}\right)\right] \\ &\stackrel{\text{ou}}{=} 0.75\mathbb{E}[(X - 6)\mathbf{1}_{X > 6}] = 0.75 \int_6^\infty (x - 6) \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x + \theta)^{\alpha + 1}} dx \\ &= 0.75 \int_6^\infty \left(\frac{\alpha\theta^\alpha}{(x + \theta)^\alpha} - \frac{(\theta + 6)\alpha\theta^\alpha}{(x + \theta)^{\alpha + 1}}\right) dx = \frac{0.75}{\alpha - 1} \theta^\alpha (6 + \theta)^{-\alpha + 1} \\ &= 0.61035. \end{aligned}$$

et donc  $\mathbb{E}[S] = 1.83105$ .

2. Si on utilise  $S = \sum_{j=1}^{N^P} Y_j^P$ , il faut calculer  $\mathbb{E}[N^P]$  et  $\mathbb{E}[Y^P]$ . On remarque que  $N^P$  suit la loi  $Poisson(v\lambda)$  avec  $v = \left(\frac{\theta}{6 + \theta}\right)^\alpha = 0.1526$  et  $\lambda = 3$ .

Cherchons la loi de  $S$  : on a, pour  $y > 0$

$$\begin{aligned} F_{Y^P}(y) &= \mathbb{P}(0.75(X - 6) \leq y | X > 6) = 1 - \mathbb{P}(X > 6 + y/0.75 | X > 6) \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}(X > 6 + y/0.75)}{\mathbb{P}(X > 6)} = 1 - \left(\frac{6 + \theta}{6 + y/0.75 + \theta}\right)^\alpha \\ &= 1 - \left(\frac{16}{16 + y/0.75}\right)^4 \end{aligned}$$

Pour obtenir la loi de  $S$ , on peut discrétiser la loi de  $Y^P$  (par la méthode des moments ou des arrondis) et ensuite utiliser l'algorithme de Panjer avec  $N^P$  appartient à la famille  $(a, b, 0)$  avec  $a = 0$  et  $b = 3v = 0.45776$ .

## 2.7 Quelques mots à propos du modèle individuel

Ce modèle a été introduit en assurance vie. On considère  $n$  polices d'assurance,  $n$  est connu (c'est une constante). On note  $X_i$  le montant des réclamations de la  $i^{\text{ème}}$  police. Le montant total des réclamations est

$$S = \sum_{i=1}^n X_i$$

où les  $X_i$  sont supposés indépendants, mais pas forcément de même loi.

En assurance vie, on a  $X_i = \begin{cases} 0 & \text{si la personne } i \text{ est en vie} \\ b_i & \text{si la personne } i \text{ décède} \end{cases}$ ,  $b_i$  étant le montant inscrit dans la police d'assurance de la personne  $i$ .

On note  $q_i$  la probabilité que la personne  $i$  décède. On a donc  $\mathbb{P}(X_i = b_i) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = q_i$

**Remarque 2.7.1.** Si les  $X_i$  sont i.i.d. avec  $b_i = 1$  alors  $S \sim \text{Binomiale}(n, q)$ .

Le montant moyen des réclamations est

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^n b_i q_i.$$

Comme les  $X_i$  sont indépendants, la variance des réclamations est

$$\text{Var}(S) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n b_i^2 q_i (1 - q_i).$$

La fonction génératrice des moments de  $S$  est par indépendance des  $X_i$

$$M_S(z) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(z) = \prod_{i=1}^n (q_i e^{z b_i} + (1 - q_i)).$$

On peut généraliser ce modèle en prenant des montants de paiement  $B_i$  aléatoires :

$$X_i = I_i \times B_i \text{ avec } I_i = \begin{cases} 0 & \text{avec proba } 1 - q_i \\ 1 & \text{avec proba } q_i \end{cases} \text{ en supposant } B_i \text{ et } I_i \text{ indépendants.}$$

On a alors

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^n q_i \mathbb{E}[B_i] \quad \text{Var}(S) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(I_i B_i) = \sum_{i=1}^n (q_i \text{Var}(B_i) + q_i (1 - q_i) \mathbb{E}[B_i]^2).$$

**Exemple 2.7.2.** Une police d'assurance vie pour un groupe d'employés contient une compensation en cas de décès accidentel.

La probabilité de décès est 0.01 et 30% des décès sont accidentels.

Pour 50 employés, le bénéfice est 50 000\$ en cas de décès ordinaire et 100 000\$ en cas de décès accidentel.

Pour 25 employés, le bénéfice est 75 000\$ en cas de décès ordinaire et 150 000\$ en cas de décès accidentel.

Calculons la moyenne et la variance des paiements pour l'assureur.

Pour les employés, on a  $q_i = 0.01$ .

Pour  $i = 1, \dots, 50$ ,  $B_i = \begin{cases} 50\,000 & \text{avec proba } 0.7 \\ 100\,000 & \text{avec proba } 0.3 \end{cases}$  et pour  $i = 51, \dots, 75$ ,  $B_i = \begin{cases} 100\,000 & \text{avec proba } 0.7 \\ 150\,000 & \text{avec proba } 0.3 \end{cases}$ .

Alors  $\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^{75} q_i \mathbb{E}[B_i] = 0.01(50 \times (50\,000 \times 0.7 + 100\,000 \times 0.3) + 25 \times (75\,000 \times 0.7 + 150\,000 \times 0.3)) = 56\,875$   
 et  $\text{Var}(S) = 5\,001\,984\,375$ .

## 2.8 Quelques exercices

### 2.8.1 Propriétés et étude de $S_N$

**Exercice 1.** Une compagnie modélise ses pertes agrégées. On modélise la moyenne des pertes  $m$ , qui est inconnue, avec une loi uniforme  $\mathcal{U}([2, 4])$ . Connaissant  $m$ , les pertes agrégées sont modélisées avec une loi exponentielle. Calculer la valeur espérée des pertes.

**Corrigé** On sait que  $S|m \sim \text{Exp}(1/m)$  et  $m \sim \mathcal{U}([2, 4])$ .

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_N|m]] = \mathbb{E}[m] = (4 + 2)/2 = 3.$$

△

**Exercice 2.** On suppose que  $N \sim BN(r = 15, \beta = 5)$  et  $X_i \sim \mathcal{U}([0, 10])$ . Calculer la prime  $\pi$  telle que  $\mathbb{P}(S_N > \pi) = 0.05$  en utilisant une approximation normale.

**Corrigé** On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_N] &= \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X] = 15 \times 5 \times 5 = 375 \\ \text{Var}(S_N) &= \mathbb{E}[N]\text{Var}(X) + \text{Var}(N)\mathbb{E}[X]^2 = 75 \times \frac{100}{12} + 75 \times 6 \times 5^2 = 11875.\end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{P}(S > \pi) = 0.05 = \mathbb{P}\left(\frac{S - 375}{\sqrt{11875}} > \frac{\pi - 375}{\sqrt{11875}}\right) \simeq \mathbb{P}\left(Z > \frac{\pi - 375}{\text{sqrt}11875}\right)$$

avec  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , d'où  $\frac{\pi - 375}{\sqrt{11875}} = 1.6449$  et donc  $\pi = 554.245$ .

△

**Exercice 3.** Les assurés automobiles sont regroupés en trois classes (en fonction du nombre d'accidents de l'année précédente). Le nombre de réclamation pour chaque assuré suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Calculer la variance du nombre de réclamations d'un assuré choisi au hasard.

On a les données suivantes

classe	% de la population	$\lambda$
1	0.25	5
2	0.25	3
3	0.50	2

**Corrigé** On est dans un cadre d'un mélange de lois : si on note  $N$  le nombre de réclamation d'un assuré, on a  $N|\lambda \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et  $\lambda$  suit la loi discrète :  $\mathbb{P}(\lambda = 5) = 0.25 = \mathbb{P}(\lambda = 3)$  et  $\mathbb{P}(\lambda = 2) = 0.5$ .

On a alors

$$\text{Var}(N) = \mathbb{E}[\text{Var}(N|\lambda)] + \text{Var}(\mathbb{E}[N|\lambda]) = \mathbb{E}[\lambda] + \text{Var}(\lambda) = 3 + 1.5 = 4.5$$

On remarque que  $\mathbb{E}[N] = 3 \neq \text{Var}(N)$ . La variable  $N$  ne suit pas une loi de Poisson!

△

**Exercice 4.** On suppose que les remboursements  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu = 100, \sigma^2 = 9)$  et que la fréquence  $N$  suit la loi

$n$	0	1	2	3
$f_N(n)$	0.5	0.2	0.2	0.1

Déterminer la probabilité que la somme agrégée  $S_N$  des remboursements soit plus grande que 100, sans utiliser d'approximation.

**Corrigé** On sait que la somme de deux normales indépendantes est encore une normale d'espérance la somme des espérances et de variance la somme des variances. Par conséquent, la loi de  $S_N|N = n$  est une loi  $\mathcal{N}(100n, 9n)$ . La fonction de répartition de  $S_N$  est

$$F_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^3 p_n F^{*n}(x) \quad \text{avec } F^{*n}(x) = \Phi\left(\frac{x - 100n}{\sqrt{9n}}\right)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de  $\mathcal{N}(0,1)$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} F_{S_N}(100) &= 0.5 + 0.2\Phi\left(\frac{100 - 100}{\sqrt{9}}\right) + 0.2\Phi\left(\frac{100 - 200}{\sqrt{18}}\right) + 0.1\Phi\left(\frac{100 - 300}{\sqrt{27}}\right) \\ &= 0.5 + 0.2 \times \frac{1}{2} + 0.2\Phi(-23.57) + 0.1\Phi(-38.49) \\ &\simeq 0.6. \end{aligned}$$

D'où  $\mathbb{P}(S_N > 100) = 0.4$ . △

## 2.8.2 Prime Stop-Loss

**Exercice 5.** On sait que les réclamations agrégées suivent une loi uniforme  $\mathcal{U}([0, 10])$ .

L'assureur  $A$  propose une couverture stop-loss avec une franchise de 6\$ pour une prime égale à la valeur espérée stop-loss.

L'assureur  $B$  propose une couverture totale pour une prime de 7\$. En plus il propose un remboursement de l'excès au dessus de  $7k$  \$.

On cherche la valeur de  $k$  pour laquelle les deux propositions ont le même coût.

**Corrigé**

— Assureur  $A$  : la couverture est  $(S - 6)_+$  et la prime  $\pi = \mathbb{E}[(S - 6)_+]$ , le coût espéré est

$$C_A = \mathbb{E}[(S - 6)_+] - \pi = 0.$$

— Assureur  $B$  : la couverture est  $S$ , la prime  $\pi = 7$  et un remboursement de  $(S - 7k)_+$ . Le coût espéré est

$$C_B = \mathbb{E}[S] - \pi + \mathbb{E}[(S - 7k)_+] = 5 - 7 + \int_{7k}^{10} \frac{x - 7k}{10} dx = -2 + \frac{(10 - 7k)^2}{20}$$

Il faut donc que  $(10 - 7k)^2 = 40$ , soit  $k = 0.525$ . △

### 2.8.3 Calcul de la loi de $S_N$

**Exercice 6.** Calculer la densité de  $S_N$  pour  $N \sim \text{Logarithme}(\beta)$  et  $X \sim \text{Exp}$  de moyenne  $\theta$ .  
Rappel :  $N$  est à valeurs dans  $\{1, 2, 3, \dots\}$  et

$$p_n = \mathbb{P}(N = n) = \frac{\beta^n}{n(1 + \beta)^n \ln(1 + \beta)}.$$

**Corrigé** On a  $f_{S_N}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x)$  avec  $f_X^{*n}(x)$  densité de la loi **Gamma**( $n, 1/\theta$ ). D'où

$$\begin{aligned} f_{S_N}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n(1 + \beta)^n \ln(1 + \beta)} \frac{1}{(n-1)! \theta^n} x^{n-1} e^{-x/\theta} \\ &= \frac{e^{-x/\theta}}{x \ln(1 + \beta)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta x)^n}{n! ((1 + \beta)\theta)^n} \\ &= \frac{e^{-x/\theta}}{x \ln(1 + \beta)} \left( e^{\frac{\beta x}{(1 + \beta)\theta}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x \ln(1 + \beta)} \left( e^{\frac{-x}{(1 + \beta)\theta}} - e^{\frac{-x}{\theta}} \right) \end{aligned}$$

La densité est explicite ! △

#### Exercice 7.

On suppose que  $N$  suit une loi binomiale négative  $BN(r, \beta)$  et  $X \sim \text{Exp}$  de moyenne  $\theta$

1. Calculer la fonction génératrice d'une loi **Géométrique**( $\beta$ ) et en déduire la fonction génératrice de  $N$ .
2. Calculer la fonction génératrice de  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  avec  $X_i$  i.i.d. de même loi que  $X$  et indépendants de  $N$ .
3. Remarquer que la loi de  $S$  est la même que celle de  $\tilde{S} = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{X}_i$  avec  $\tilde{N} \sim \text{Binomiale}(m, p)$  et  $\tilde{X} \sim \text{Exp}$  de moyenne  $\alpha$ , en explicitant les valeurs de  $m, p, \alpha$  en fonction de  $r, \beta, \theta$ .

#### Corrigé

1. Soit  $G \sim \text{Géométrique}(\beta)$  :

$$\begin{aligned} M_G(z) &= \frac{1}{\beta + 1} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\beta e^z}{\beta + 1} \right)^i \\ &= \frac{1}{\beta + 1} \frac{1}{1 - \frac{\beta e^z}{\beta + 1}} = \frac{1}{1 - \beta(e^z - 1)} \quad \text{pour } \frac{\beta e^z}{\beta + 1} < 1. \end{aligned}$$

On remarque qu'une  $BN(r, \beta)$ , avec  $r \in \mathbb{N}^*$ , est la somme de  $r$  variables géométriques indépendantes, donc pour  $z$  assez petit

$$M_N(z) = \left( \frac{1}{1 - \beta(e^z - 1)} \right)^r$$

2. Calculons la fonction génératrice de  $X$  :

$$\begin{aligned} M_x(z) &= \frac{1}{\theta} \int_0^{\infty} e^{(z - \frac{1}{\theta})x} dx = \frac{1}{\theta} \left[ \frac{1}{z - \frac{1}{\theta}} e^{(z - \frac{1}{\theta})x} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{1 - \theta z} \quad \text{pour } z < 1/\theta. \end{aligned}$$

On en déduit la fonction génératrice de la somme agrégée est pour  $z$  assez petit

$$\begin{aligned} M_{S_N}(z) &= M_N(\ln(M_X(z))) = \left( \frac{1}{1 - \beta \left( \frac{1}{1 - \theta z} - 1 \right)} \right)^r \\ &= \left( \frac{1 - \theta z}{1 - (\beta + 1)\theta z} \right)^r = \left( \frac{1}{\beta + 1} \left( \frac{\beta}{1 - (\beta + 1)\theta z} + 1 \right) \right)^r. \end{aligned}$$

3. On remarque que la fonction génératrice d'une binomiale  $\bar{N} \sim \mathcal{B}(r, p)$  est

$$M_{\bar{N}}(z) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (pe^z)^k q^{r-k} = (pe^z + q)^r \quad \text{avec } q = 1 - p.$$

et donc si  $\bar{X} \sim \text{Exp}$  de moyenne  $\alpha$ , on a

$$M_{\bar{S}_N}(z) = \left( p \frac{1}{1 - \alpha z} + q \right)^r.$$

Par conséquent, la loi de  $S_N$  avec  $N \sim \text{BN}(r, \beta)$  et  $X \sim \text{Exp}$  de moyenne  $\theta$  est la même que la loi de  $S_N$  avec  $N \sim \mathcal{B}(r, p)$  avec  $p = \beta/(\beta + 1)$  et  $X \sim \text{Exp}$  de moyenne  $(\beta + 1)\theta$ .

△

## 2.8.4 Algorithme de Panjer

**Exercice 8.** On considère une somme agrégée des coûts avec une fréquence  $N \sim \mathcal{P}(2)$  et des sévérités  $X \sim f_X$  avec  $f_X(1) = 1/4$  et  $f_X(2) = 3/4$ .

La compagnie d'assurance couvre toutes les pertes avec une prime de  $\pi = 6\$$  et elle paye les dividendes selon la formule  $(4.5 - S)_+$  : si la perte est inférieure à 4.5, elle rembourse en plus la différence.

Calculer le coût total moyen pour l'assuré :

$$\pi - \mathbb{E}[S] - \mathbb{E}[(4.5 - S)_+].$$

**Corrigé** On a

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X] = 2(1/4 + 2 \cdot 3/4) = 7/2 = 3.5$$

$S$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Pour calculer  $\mathbb{E}[(4.5 - S)_+]$ , il faut connaître  $f_S(k)$  pour  $k = 0, 1, \dots, 4$ . Utilisons l'algorithme de Panjer avec  $a = 0$  et  $b = 2$  :

$$\begin{aligned} f_S(0) &= \mathbb{P}(N = 0) = e^{-2} = 0.13534 \\ f_S(1) &= 2f_S(0)/4 = 0.06767 \\ f_S(2) &= f_S(1)/4 + 2f_S(0) \times 3/4 = 0.21992 \\ f_S(3) &= \frac{2}{3}(f_S(2)/4 + 2f_S(1) \times 3/4) = 0.10432 \\ f_S(4) &= \frac{1}{2}(f_S(3)/4 + 2f_S(3) \times 3/4) = 0.17798. \end{aligned}$$

Donc  $\mathbb{E}[(4.5 - S)_+] = 4.5f_S(0) + 3.5f_S(1) + 2.5f_S(2) + 1.5f_S(3) + 0.5f_S(4) = 1.641117$ .

Le coût moyen pour cette couverture est

$$\pi - \mathbb{E}[S] - \mathbb{E}[(4.5 - S)_+] = 6 - 3.5 - 1.641117 = 0.859.$$

△

# Chapitre 3

## Probabilité de ruine

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre *Modèles Agrégés* nous avons étudié les pertes totales  $S$  pour une période de temps fixée (1 semaine, 1 mois, 1 an, ...). Dans ce chapitre on va considérer l'évolution en temps des pertes.

On pourra se placer dans le cadre des temps discret  $S_1, S_2, S_3, \dots$  lorsqu'on considèrera les pertes pour des périodes définies (toutes les semaines, tous les mois, ...) ou dans le cadre des temps continus  $(S_t)_{t \geq 0}$  si on veut une analyse fine des pertes (notamment dans le cadre financier).

Par ailleurs, on va aussi prendre en compte d'autres variables d'intérêt : l'inflation, les taux d'intérêt, les primes, les dépenses, les investissements, etc. . .

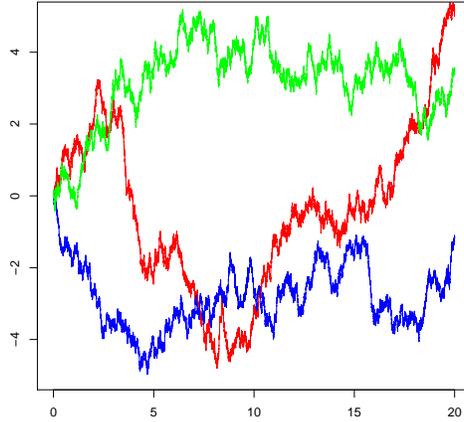
On étudiera cependant dans ce cours des modèles simplifiés afin que l'analyse mathématiques ne soit pas trop complexe. Ces modèles peuvent être généralisés pour ajouter différentes réalités.

### 3.2 Quelques rappels sur les processus

**Définition 3.2.1.** *Un processus stochastique est une famille  $(X_t)_{t \in T}$  de variables aléatoires  $X_t$ . L'indice  $t$  représente, dans le cadre de ce cours, le temps.*

*On va parfois considérer des processus en temps discret, i.e.  $T$  est un ensemble discret, parfois des processus en temps continu, i.e.  $T$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , en général  $T = [0, \infty)$ .*

*La fonction qui à  $t$  associe la variable  $X_t$  est appelée trajectoire :  $t \mapsto X_t$ . Une trajectoire est aléatoire.*



Trois réalisations d'une trajectoire d'un mouvement brownien sur l'intervalle de temps  $[0,20]$ .

**Définition 3.2.2.** La loi d'un processus est définie par ses lois  $d$ -dimensionnelles pour tout  $d \geq 1$  (on parle aussi de lois finies dimensionnelles).

La loi  $d$ -dimensionnelle du processus  $(X_t)_{t \in T}$  est l'ensemble des lois jointes  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_d})$  pour tout  $(t_1, t_2, \dots, t_d) \in T$ .

**Définition 3.2.3.** Un processus  $(X_t)_{t \in T}$  est dit à accroissement indépendants si pour tout  $u \leq v \leq s \leq t$   $X_t - X_s$  est indépendant de  $X_v - X_u$ .

Un processus  $(X_t)_{t \in T}$  est dit à accroissement stationnaires si la loi  $X_{t+h} - X_t$  ne dépend que de la longueur  $h$  de l'intervalle  $[t, t+h]$ , i.e. pour tout  $t, s \geq 0$ ,  $h \geq 0$

$$X_{t+h} - X_t \stackrel{\text{Loi}}{=} X_{s+h} - X_s.$$

En assurance, on suppose souvent que le processus des pertes  $(S_t)_{t \in T}$  est à accroissement indépendants et stationnaires (AIS). En effet les pertes sont en général indépendantes (sauf s'il s'agit un événement extrême, comme un ouragan). Par contre, l'hypothèse de stationnarité est moins légitime en général (on peut avoir des changements de régime, par exemple liés aux cycles climatiques).

**Exemple 3.2.4.** On suppose les pertes individuelles  $X_i$  i.i.d. et  $N$  un processus de Poisson indépendant des  $X_i$  d'intensité  $\lambda$ . Alors

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

est un PAIS (processus à accroissement indépendants et stationnaires). Le processus  $(S_t)_{t \geq 0}$  est appelé processus de Poisson composé PPC( $\lambda, F_X$ ).

En effet, on remarque que si  $t, h \geq 0$

$$S_{t+h} - S_t = \sum_{i=N_t+1}^{N_{t+h}} X_i \stackrel{\text{Loi}}{=} \sum_{i=1}^{N_h} X_i = S_h$$

car  $N$  est un PAIS :  $N_{t+h} - N_t \stackrel{\text{Loi}}{=} N_h$  et le nombre de pertes  $N_{t+h} - N_t$  sur l'intervalle de temps  $(t, t+h]$  est indépendant du nombre de pertes  $N_t$  avant l'instant  $t$  et comme les  $X_i$  sont indépendants,  $S_{t+h} - S_t$  est indépendant de  $S_t$ .

### 3.3 Premiers modèles en assurance

#### 3.3.1 Modélisation du surplus

On souhaite modéliser le processus des surplus d'une compagnie d'assurance. On note ce processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ , où  $U_t$  représente le surplus de la compagnie à l'instant  $t$ .

On a

$$U_t = u + P_t - S_t$$

où

- $u$  est le capital initial ( $U_0 = u$ ),
- $P_t$  est le processus des gains (primes reçues, intérêts issus d'investissements et tous les autres sources de revenu),
- $S_t$  est le processus des pertes (indemnités versées, intérêts issus de crédits, ...).

De façon générale,  $P_t$  peut dépendre de  $(S_u)_{u < t}$ . En effet, les primes peuvent s'actualiser en fonction des pertes versées de façon à mieux représenter le niveau du risque. Par exemple en assurance automobile, la prime de chaque conducteur est ré-évaluée chaque année en fonction du nombre d'accidents de l'année précédente.

De façon générale, les pertes  $S_t$  ne s'écrivent pas forcément comme des sommes agrégées et si tel est le cas les  $X_i$  ne sont pas forcément indépendants.

Cependant dans ce cours, on va étudier seulement deux modèles simplifiés :

- Cas discret : on étudie le modèle à travers ses accroissements. On note  $W_t = U_t - U_{t-1}$  l'accroissement du surplus pour la période  $(t-1, t]$  :

$$W_t = P_t - P_{t-1} - (S_t - S_{t-1}), \quad t = 1, 2, \dots$$

On a alors  $U_t = U_{t-1} + W_t$  pour  $t = 1, 2, \dots$

- Cas continu : on étudie le modèle de Poisson Composé

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

où  $u$  le capital initial,  $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$  un processus de Poisson composé où  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et  $c$  la prime par unité de temps de la forme  $c = (1 + \theta)\mathbb{E}[S_t] = (1 + \theta)\lambda\mathbb{E}[X]$ .

#### 3.3.2 Probabilité de ruine

La compagnie d'assurance souhaite que son surplus reste positif, mais du fait des aléas elle ne peut pas en général en être certaine.

**Définition 3.3.1.** *La probabilité de survie à horizon fini  $T$  en temps continu est*

$$\phi(u, T) = \mathbb{P}(U_t \geq 0 : \forall t \in [0, T] | U_0 = u).$$

*Si on considère le processus en temps discret, on vérifie seulement à la fin de chaque période le surplus*

$$\tilde{\phi}(u, T) = \mathbb{P}(U_t \geq 0 : \forall t \in \{0, 1, 2, T\} | U_0 = u).$$

**Définition 3.3.2.** La probabilité de survie à horizon infini en temps continu est

$$\phi(u) = \mathbb{P}(U_t \geq 0 : \forall t \geq 0 | U_0 = u)$$

et en temps discret

$$\tilde{\phi}(u) = \mathbb{P}(U_t \geq 0 : \forall t \in \mathbb{N} | U_0 = u).$$

**Remarque 3.3.3.**

- $\phi(u) \leq \tilde{\phi}(u) \leq \tilde{\phi}(u, T)$ .
- $\phi(u) \leq \phi(u, T) \leq \tilde{\phi}(u, T)$ .
- $\lim_{T \rightarrow \infty} \phi(u, T) = \phi(u)$ .
- $\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(u, T) = \tilde{\phi}(u)$ .

**Définition 3.3.4.** La probabilité de ruine à horizon fini  $T$  en temps continu est

$$\psi(u, T) = 1 - \phi(u, T)$$

et en temps discret  $\tilde{\psi}(u, T) = 1 - \tilde{\phi}(u, T)$ .

La probabilité de ruine à horizon infini en temps continu est  $\psi(u) = 1 - \phi(u)$  et en temps discret  $\tilde{\psi}(u) = 1 - \tilde{\phi}(u)$ .

### 3.4 Probabilité de ruine en temps discret à horizon fini

On considère le modèle

$$U_t = u + \sum_{j=1}^t [P_j + C_j - S_j] = U_{t-1} + P_t + C_t - S_t, \quad \text{pour } t = 0, 1, 2, \dots$$

où  $U_t$  est la valeur du processus de surplus à la fin de la  $t^{\text{ème}}$  période et

- $u$  est le capital initial,
- $P_t$  représente les primes reçues pendant la  $t^{\text{ème}}$  période,
- $C_t$  représente les autres gains reçus pendant la  $t^{\text{ème}}$  période (issus d'investissements par exemple)
- $S_t$  représente les pertes payées pendant la  $t^{\text{ème}}$  période

**Hypothèse** : On suppose que le processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Markov.

Ceci signifie que l'évolution du processus après l'instant  $t$  dépend de la valeur  $U_t$  à l'instant  $t$  mais pas des valeurs précédentes.

On souhaite évaluer de la probabilité de ruine de notre modèle avant l'instant  $T$  :

$$\psi(u, T) = 1 - \phi(u, T) = \mathbb{P}(\text{il existe } t \in \{0, \dots, T\} : U_t < 0).$$

On introduit un nouveau processus  $U_t^*$  égal à  $U_t$  tant que  $U_t$  est positif et qui reste négatif jusqu'à la fin dès que  $U_t$  passe en dessous de zéro.

Pour cela, on note  $W_t = U_t - U_{t-1}$  pour  $t \geq 1$  (d'où  $U_t = W_t + U_{t-1}$ ) et on définit

$$U_t^* = W_t^* - U_{t-1}^* \text{ avec } U_0^* = u \text{ et } W_t^* = \begin{cases} W_t & \text{si } U_{t-1}^* \geq 0 \\ 0 & \text{si } U_{t-1}^* < 0 \end{cases}$$

La probabilité de survie sur l'intervalle  $[0, T]$  se calcule alors en regardant juste la valeur finale de  $U^*$  :

$$\tilde{\phi}(u, T) = \mathbb{P}(U_T^* \geq 0).$$

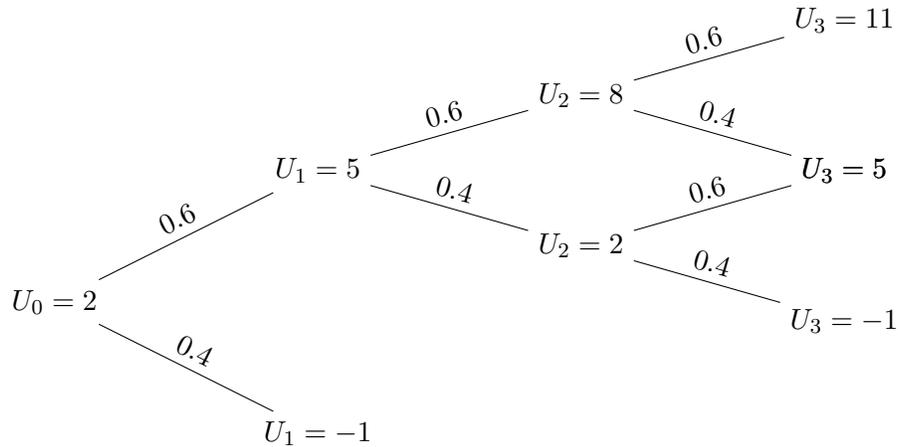
**Exemple 3.4.1.** On suppose que

- le surplus initial est  $u = 2\$$ ,
- la prime est constante égale à  $3\$$  par unité de temps,
- les pertes  $S = \begin{cases} 0\$ & \text{avec probabilité } 0.6 \\ 6\$ & \text{avec probabilité } 0.4 \end{cases}$

et qu'il n'y a pas d'autres coûts ou revenus. On a donc

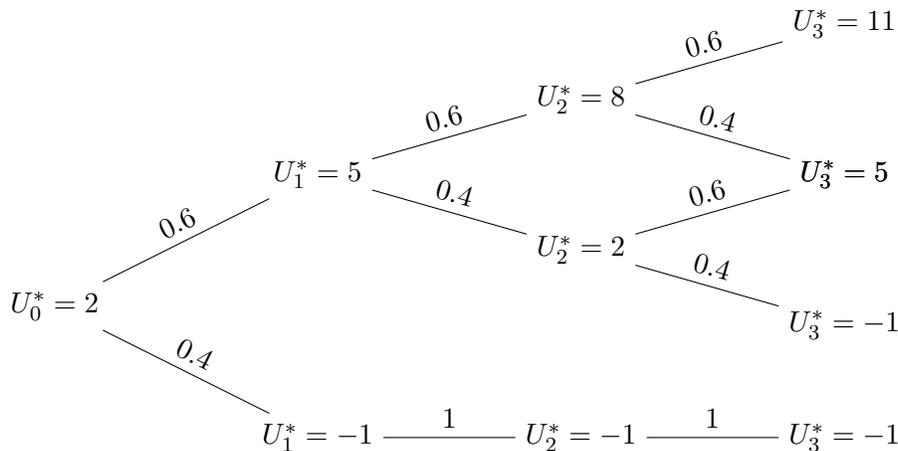
$$U_t = 2 + 3t - \sum_{i=1}^t S_i \text{ et } W_t = 3 - S_t = \begin{cases} 3\$ & \text{avec probabilité } 0.6 \\ -3\$ & \text{avec probabilité } 0.4 \end{cases}$$

On veut calculer  $\tilde{\phi}(u = 2, T = 2)$  et  $\tilde{\phi}(u = 2, T = 3)$ . On a



Par conséquent,  $\tilde{\phi}(u = 2, T = 2) = 1 - 0.4 = 0.6$  et  $\tilde{\phi}(u = 2, T = 3) = \mathbb{P}(U_t \geq 0 : \forall t = 0, 1, 2) = 1 - 0.4 - 0.6 \times 0.4 \times 0.4 = 0.504$ .

Si on considère  $U^*$ , on a



Par conséquent,  $\tilde{\phi}(u = 2, T = 2) = \mathbb{P}(U_2^* \geq 0) = 1 - 0.4$  et  $\tilde{\phi}(u = 2, T = 3) = \mathbb{P}(U_3^* \geq 0) = (0.6)^3 + 2 \times (0.6)^2 \times 0.4 = 0.504$ .

De manière général, on a va utiliser la méthode des convolutions dans le cas discret. On fixe  $T > 0$  et on note

- $f_j = \mathbb{P}(U_{T-1}^* = u_j)$  pour  $j \geq 1$  et  $u_j \geq 0$  : fréquences des valeurs positives de  $U_{T-1}^*$ ,
- $g_{j,k} = \mathbb{P}(W_T = w_{j,k} | U_{T-1}^* = u_j)$  : loi conditionnelle de  $W_T$  sachant que  $U_{T-1}^* = u_j$ .

La probabilité de ruine avant l'instant  $T$  s'exprime à partir de la probabilité de ruine avant l'instant  $T-1$  de la façon suivante

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi}(u, T) &= \mathbb{P}(\exists t \in \{1, 2, \dots, T\} : U_t < 0) \\
 &= \tilde{\psi}(u, T-1) + \mathbb{P}(U_{T-1}^* \geq 0 \text{ et } U_T^* = U_{T-1}^* + W_T < 0) \\
 &= \tilde{\psi}(u, T-1) + \sum_{j \geq 1} \mathbb{P}(u_j + W_T < 0 | U_{T-1}^* = u_j) \mathbb{P}(U_{T-1}^* = u_j) \\
 &= \tilde{\psi}(u, T-1) + \sum_{j \geq 1} \mathbb{P}(W_T < -u_j | U_{T-1}^* = u_j) f_j \\
 &= \tilde{\psi}(u, T-1) + \sum_{j \geq 1} \sum_{k: w_{j,k} < -u_j} g_{j,k} f_j
 \end{aligned}$$

Cette méthode récursive permet de calculer la probabilité de ruine pas à pas.

**Exemple 3.4.2.** Les pertes annuelles suivent la loi

$s$	0	2	4	6
$f_S$	0.4	0.3	0.2	0.1

La prime annuelle est de 2.5, payée en début d'année et le surplus initial est  $u = 2$ . Par ailleurs 10% d'intérêt est crédité sur le surplus disponible au début de l'année puisque les pertes sont payées à la fin de l'année.

Il y a un rabais de 0.5 sur les années où il n'y a pas de pertes. Par conséquent,  $U_0 = 2$  et

$$U_t = U_{t-1} + W_t \quad \text{avec } W_t = 2.5 + 0.1(U_{t-1} + 2.5) - S - 0.5\mathbf{1}_{S=0}$$

On souhaite calculer  $\tilde{\psi}(2, 0)$ ,  $\tilde{\psi}(2, 1)$ ,  $\tilde{\psi}(2, 2)$ .

- Comme  $u = 2 > 0$ ,  $\psi(2, 0) = 0$ .
- La loi de  $U_0^*$  est  $f_1 = \mathbb{P}(U_0^* = 2) = 1$ . Calculons maintenant la loi conditionnelle de  $W_1$  sachant que  $U_0^* = 2$  :

$k$	1	2	3	4
$w_{1,k}$	2.45	0.95	-1.05	-3.05
$g_{1,k}$	0.4	0.3	0.2	0.1

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi}(2, 1) &= \tilde{\psi}(u, 0) + f_1 \sum_{k: w_{j,k} < -2} g_{j,k} \\
 &= 0 + 0.1 = 0.1
 \end{aligned}$$

- Les fréquences des valeurs positives de  $U_1^* = U_0^* + W_t^* = 2 + W_t^*$  sont

$j$	1	2	3
$u_j$	4.45	2.95	0.95
$f_j$	0.4	0.3	0.2

La loi conditionnelle de  $W_2$  sachant que  $U_1^* = u_j : w_{j,k} = 2.5 + 0.1(u_j + 2.5) - s_k - 0.5\mathbb{1}_{s_k=0}$

			$k$			
			1	2	3	4
$f_j$	$j$	$u_j$	$g_{j,1} = 0.4$	$g_{j,2} = 0.3$	$g_{j,3} = 0.2$	$g_{j,4} = 0.1$
			$w_{j,1}$	$w_{j,2}$	$w_{j,3}$	$w_{j,4}$
0.4	1	4.45	2.695	1.195	-0.805	-2.805
0.3	2	2.95	2.545	1.045	-0.955	-2.955
0.2	3	0.95	2.345	0.845	-1.155	-3.155

et donc

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(2, 2) &= \tilde{\psi}(u, 1) + \sum_{j \geq 1} f_j \sum_{k: w_{j,k} < -u_j} g_{j,k} \\ &= 0.1 + 0.3 \times 0.1 + 0.2 \times 0.2 + 0.2 \times 0.1 = 0.19\end{aligned}$$

### 3.5 Théorie de la ruine en temps continu

Le modèle classique en temps continu est celui où les pertes sont modélisées par un processus de Poisson composé : pour  $t \geq 0$

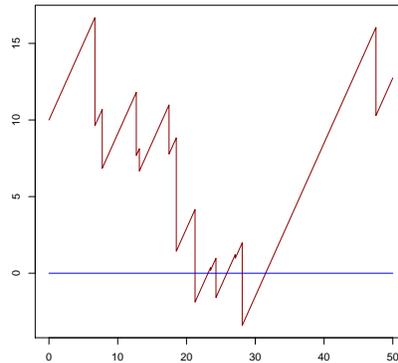
$$U_t = u + ct - S_t \quad \text{avec } S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

où

- $u$  représente le capital initial,
- $c$  est la prime par unité de temps,
- $S_t$  représente les pertes agrégées jusqu'à l'instant  $t$ , avec

$N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  (voir notes de cours sur les processus de Poisson dans Studium),

les  $X_i$  représentent les pertes individuelles, ils sont supposés i.i.d. d'espérance  $\mu$  et indépendants de  $N$ .



Trajectoire du surplus partant de  $u = 10$   
avec des pertes exponentielles ( $\mu = 3, c = 1, \lambda = 0.3$ ).

$S_t$  est un processus de Poisson composé. On a

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[N_t]\mathbb{E}[X] = \lambda t\mu, \quad \text{Var}(S_t) = \lambda t\mathbb{E}[X^2].$$

Et par conséquent

$$\mathbb{E}[U_t] = u + (c - \lambda\mu)t, \quad \text{Var}(U_t) = \lambda t\mathbb{E}[X^2].$$

On peut montrer que si  $c \leq \lambda\mu$ , alors la compagnie est sûre d'être ruinée :

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\exists t \geq 0 : U_t < 0 | U_0 = u) = 1.$$

Dans le cas où  $c > \lambda\mu$ , en utilisant la loi des grands nombres, on a

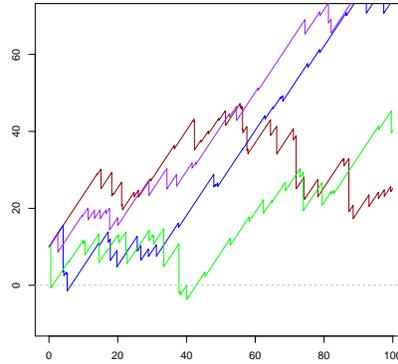
- $\frac{1}{t}S_t = \frac{N_t}{t} \times \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} X_i \rightarrow \lambda\mu$  quand  $t \rightarrow +\infty$  et donc

$$U_t = u + t \left( c - \frac{S_t}{t} \right) \rightarrow +\infty \text{ quand } t \rightarrow +\infty,$$

- $\psi(u) < 1$ .

Nous allons dans la suite considérer une prime par unité de temps de la forme

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu \text{ avec } \theta > 0.$$



Plusieurs trajectoires du surplus partant de  $u = 10$  avec des pertes exponentielles ( $\mu = 3, \lambda = 0.3, \theta = 0.5$ ).

### 3.5.1 Estimation de la probabilité de ruine

**Définition 3.5.1.** On définit  $\tau$  l'instant de ruine partant du capital initial  $U_0 = u$  :

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : U_t < 0\} = \inf \{t \geq 0 : S_t - ct > u\}.$$

L'événement " $\forall t \geq 0, U_t \geq 0$ " est équivalent à " $\tau = \infty$ ". On remarque donc que

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\exists t \geq 0 : U_t < 0 | U_0 = u) = \mathbb{P}(\tau < \infty | U_0 = u).$$

Regardons la fonction génératrice de  $u - U_t = S_t - ct$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{z(S_t-ct)}\right] &= e^{-ctz} M_{S_t}(z) = e^{-ctz} M_{N_t}(\ln(M_X(z))) \\ &= e^{t(\lambda(M_X(z)-1)-cz)}. \end{aligned}$$

On remarque que  $M_{S_t-ct}(0) = \mathbb{E}[e^{0 \times (S_t-ct)}] = 1$  pour tout  $t \geq 0$ .

**Hypothèse** : Supposons qu'il existe  $\rho > 0$  tel que  $\lambda(M_X(\rho) - 1) - c\rho = 0$ . Alors pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}\left[e^{\rho(S_t-ct)}\right] = 1.$$

Notons  $M_t = e^{\rho(S_t-ct)}$ . Alors, pour  $s \leq t$

$$\mathbb{E}[M_t | M_s] = M_s e^{-\rho c(t-s)} \mathbb{E}\left[e^{\rho(S_t-S_s)} | M_s\right].$$

Or  $S_t - S_s = \sum_{i=N_s+1}^{N_t} X_i$  et le nombre de sauts  $N_t - N_s$  est indépendant de  $N_s$  de même loi que  $N_{t-s}$ . Comme les  $X_i$  sont i.i.d.,  $S_t - S_s$  est indépendant de  $S_s$  et a même loi que  $S_{t-s} = \sum_{i=1}^{N_{t-s}} X_i$ . Par conséquent,

$$\mathbb{E}[M_t | M_s] = M_s e^{-\rho c(t-s)} \mathbb{E}\left[e^{\rho(S_t-S_s)}\right] = M_s \mathbb{E}\left[e^{\rho(S_{t-s}-c(t-s))}\right] = M_s.$$

Le processus  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  est appelé martingale car il vérifie pour tout  $t, s$  avec  $t \geq s$

$$\mathbb{E}[M_t | M_s] = M_s.$$

Comme  $\mathbb{E}[M_t] = 1$  pour tout  $t \geq 0$ , on a notamment pour tout  $n \geq 0$  (Théorème d'arrêt pour les martingales)

$$\mathbb{E}[M_{\tau \wedge n}] = 1.$$

Par conséquent,

$$1 = \mathbb{E}[M_\tau \mathbf{1}_{\tau \leq n}] + \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{\tau > n}] \quad (*)$$

On remarque que sur  $\{\tau > n\}$ ,  $M_n = e^{\rho(S_n - cn)} < e^{\rho u}$  et comme  $S_n - cn = u - U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$ , on obtient par passage à la limite dans l'équation (\*) quand  $n \rightarrow +\infty$

$$1 = \mathbb{E}[M_\tau \mathbf{1}_{\tau < \infty}]$$

Par ailleurs, comme  $S_\tau - c\tau > u$ , on a  $M_\tau = e^{\rho(S_\tau - c\tau)} > e^{\rho u}$  et

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\tau < \infty | U_0 = u) \leq e^{-\rho u}.$$

**Proposition 3.5.2.** *S'il existe  $\rho > 0$  tel que  $\lambda(M_X(\rho) - 1) - c\rho = 0$ . Alors la probabilité de ruine vérifie*

$$\psi(u) \leq e^{-\rho u}$$

et par conséquent,  $\psi(u) \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{} 0$  avec une vitesse exponentielle.

### 3.5.2 Coefficient d'ajustement de Lundberg

Si on considère des primes de la forme  $c = (1 + \theta)\lambda\mu$  avec  $\theta > 0$ , l'équation de Lundberg s'écrit

$$\lambda(M_X(\rho) - 1) - c\rho = \lambda(M_X(\rho) - 1 - (1 + \theta)\mu\rho) = 0.$$

**Définition 3.5.3.** *Le coefficient d'ajustement est la plus petite solution strictement positive  $\rho > 0$  telle que*

$$M_X(\rho) = 1 + (1 + \theta)\mu\rho.$$

**Remarque 3.5.4.** *Pour certaines lois  $M_X$  n'est pas défini (par exemple : Pareto, Log-Normale) et donc le coefficient d'ajustement  $\rho$  n'existe pas.*

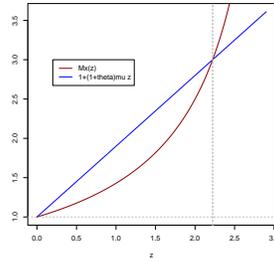
Si  $M_X$  est bien défini, alors le coefficient existe mais n'est pas toujours simple à calculer. En effet, on cherche  $\rho > 0$  tel que

$$M_X(\rho) = 1 + (1 + \theta)\mu\rho.$$

La courbe  $z \mapsto 1 + (1 + \theta)\mu z$  est une droite partant de 1 en zéro, de pente  $(1 + \theta)\mu$ .

La courbe  $z \mapsto M_X(z)$  passe par 1 en zéro et sa pente en 0 est  $M'_X(0) = \mathbb{E}[X] = \mu < (1 + \theta)\mu$ . Par ailleurs, comme  $M''_X(z) = \mathbb{E}[X^2 e^{zX}] > 0$ , la fonction  $z \mapsto M_X(z)$  est convexe.

Il existe forcément  $\rho > 0$  où les courbes se croisent à nouveau :



**Exemple 3.5.5.** Si  $X$  suit la loi exponentielle de moyenne  $\mu$ , alors

$$M_X(z) = \begin{cases} \frac{1}{1-\mu z} & \text{si } z < 1/\mu \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On doit résoudre l'équation de Lundberg

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\mu z} &= 1 + (1 + \theta)\mu z \\ \Leftrightarrow \theta\mu z - (1 + \theta)\mu^2 z^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z &= \frac{\theta}{(1 + \theta)\mu}. \end{aligned}$$

Par conséquent, dans le cas de la loi exponentielle le coefficient de Lundberg est

$$\rho = \frac{\theta}{(1 + \theta)\mu}.$$

**Exemple 3.5.6.** Si  $X$  suit la loi Gamma  $\mathbf{G}(\alpha = 2, \beta)$  et  $\theta = 2$ , on a

$$M_X(z) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1-\beta z}\right)^\alpha & \text{si } z < 1/\beta \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On doit par conséquent résoudre ( $\mu = \alpha\beta = 2\beta$  et  $1 + \theta = 3$ )

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-\beta z}\right)^2 &= 1 + 6\beta z \\ \Leftrightarrow 1 &= 1 + 6\beta z - 2\beta z(1 + 6\beta z) + \beta^2 z^2(1 + 6\beta z) \\ \Leftrightarrow 4\beta z - 11\beta^2 z^2 + 6\beta^3 z^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } 6\beta^2 z^2 - 11\beta z + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = \frac{1}{2\beta} \text{ ou } z = \frac{4}{3\beta}. \end{aligned}$$

Comme  $\frac{4}{3\beta} > \frac{1}{2\beta}$  (par ailleurs  $\frac{4}{3\beta}$  est en dehors du domaine de  $M_X$ ), le coefficient de Lundberg est

$$\rho = \frac{1}{2\beta}.$$

### 3.5.3 Estimation du coefficient de Lundberg

**Exemple 3.5.7.** On considère une prime  $c = 2.99$ , un taux de saut  $\lambda = 1$  et on suppose que les réclamations suivent la loi

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0.2 \quad \mathbb{P}(X = 2) = 0.3 \quad \mathbb{P}(X = 3) = 0.5$$

Calculons  $M_X$  :

$$M_X(z) = 0.2e^z + 0.3e^{2z} + 0.5e^{3z}.$$

Par conséquent, il faut résoudre  $((1 + \theta)\mu = 2.99)$

$$0.2e^z + 0.3e^{2z} + 0.5e^{3z} = 1 + 2.99z.$$

Ceci n'est pas simple à résoudre à la main. On peut soit utiliser un logiciel de calcul formel (Matlab, Mathematica, ...), soit faire une résolution numérique par R ou Excel. On trouve  $\rho = 0.1943$ .

Lorsque le coefficient de Lundberg est difficile à calculer, soit on trouve une approximation par résolution numérique dans le cas où  $M_X$  est facilement calculable, soit on approche la fonction  $M_X$ .

On sait que  $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \geq 1 + z + \frac{z^2}{2}$ , d'où  $M_X(z) \geq 1 + z\mathbb{E}[X] + \frac{z^2}{2}\mathbb{E}[X^2]$  avec  $\mu = \mathbb{E}[X]$ . Par conséquent, l'équation de Lundberg s'écrit

$$1 + (1 + \theta)\mu\rho \geq 1 + \rho\mu + \frac{\rho^2}{2}\mathbb{E}[X^2] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\theta\mu}{\mathbb{E}[X^2]} \geq \rho.$$

On obtient ainsi une majoration du coefficient de Lundberg

$$\rho \leq \frac{2\theta\mu}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

**Exemple 3.5.8.** Si les pertes suivent une loi Gamma( $\alpha = 2, \beta$ ) avec  $\theta = 2$ . On a

$$\mu = \alpha\beta = 2\beta \text{ et } \mathbb{E}[X^2] = \alpha(\alpha + 1)\beta^2 = 6\beta^2.$$

On en déduit que

$$\rho \leq \frac{8}{6\beta} = \frac{4}{3\beta}.$$

Reprenons l'exemple précédent

**Exemple 3.5.9.** On considère une prime  $c = 2.99$ , un taux de saut  $\lambda = 1$  et on suppose que les réclamations suivent la loi

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0.2 \quad \mathbb{P}(X = 2) = 0.3 \quad \mathbb{P}(X = 3) = 0.5$$

On a  $\mu = 2.3$ ,  $\theta = 0.3$  et  $\mathbb{E}[X^2] = 5.9$ . Par conséquent

$$\rho \leq \frac{0.6.3}{5.9} = 0.2339.$$

L'estimation mauvaise (la vraie valeur étant 0.1943), mais on peut utiliser cette valeur pour résoudre numériquement  $\rho$  via R ou excel car on sait qu'il faut le chercher sur l'intervalle  $(0, 0.2339]$ .

**Exemple 3.5.10.** Supposons que les pertes suivent une GIG, alors

$$M_X(z) = \left(1 - 2\frac{u}{\gamma^2}\right)^{-\lambda/2} \frac{K_\lambda\left(\delta\gamma\sqrt{1 - 2\frac{u}{\gamma^2}}\right)}{K_\lambda(\delta\gamma)},$$

$$\mathbb{E}[X^k] = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^k \frac{K_{\lambda+k}(\delta\gamma)}{K_\lambda(\delta\gamma)}.$$

Par conséquent

$$\rho \leq \frac{2\theta\gamma K_{\lambda+1}(\delta\gamma)}{\delta K_{\lambda+2}(\delta\gamma)}.$$

À l'aide de cette estimation, on peut résoudre numériquement l'équation de Lundberg et trouver la valeur de  $\rho$ .

### 3.5.4 Déficit au moment de la ruine et probabilité de ruine

On considère le processus de surplus

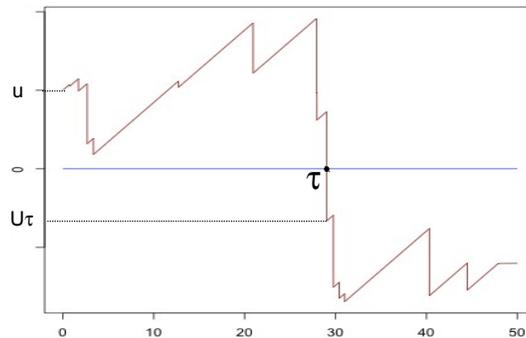
$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

où

- $u$  représente le capital initial,
- $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ ,
- $X_i$  i.i.d. d'espérance  $\mu$  et indépendants de  $N$ ,
- $c = (1 + \theta)\lambda\mu$  est la prime par unité de temps.

On note l'instant de ruine  $\tau = \inf\{t \geq 0 : U_t < 0\}$ .

**Définition 3.5.11.** On appelle déficit au moment de la ruine la variable positive  $-U_\tau$ .



On souhaite étudier la loi du déficit  $-U_\tau$  :

$$G(u, y) = \mathbb{P}(-U_\tau \leq y, \tau < \infty | U_0 = u).$$

On remarque que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} G(u, y) = \psi(u).$$

L'intérêt d'étudier la loi du déficit est qu'elle ne dépend pas de l'existence du coefficient de Lundberg. Considérer des lois à queues épaisses, où le coefficient de Lundberg n'existe pas, ne pose alors aucun problème.

**Théorème 3.5.12.** *La fonction  $G(u, y)$  vérifie l'équation différentielle : pour  $u, y \geq 0$*

$$\partial_u G(u, y) = \frac{\lambda}{c} G(u, y) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u G(u-x, y) dF_X(x) - \frac{\lambda}{c} [F_X(u+y) - F_X(u)],$$

où  $F_X$  est la fonction de répartition de  $X$ .

En prenant la limite quand  $y \rightarrow +\infty$  on obtient alors :

**Corollaire 3.5.13.**  *$\psi(u)$  vérifie l'équation*

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c} \psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-x) dF_X(x) - \frac{\lambda}{c} [1 - F_X(u)].$$

*Démonstration.*

Rappel : soient  $U, V$  deux variables aléatoires, alors

$$\mathbb{P}(U \leq u) = \int_0^\infty \mathbb{P}(U \leq u | V = v) f_V(v) dv.$$

L'idée est de conditionner par rapport au premier instant de saut et à la taille du premier saut.

On note  $T_1$  le premier instant de saut du processus de Poisson :  $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

En fonction de la taille du premier saut il peut arriver deux choses

- si  $0 \leq X_1 \leq u + cT_1$ , alors la première réclamation n'a pas provoqué de ruine,
- si  $X_1 > u + cT_1$ , alors il y a ruine :  $\tau = T_1$  et le déficit vaut  $X_1 - u - cT_1$ .

À l'instant  $T_1$  le surplus vaut

$$U_{T_1} = u + cT_1 - X_1.$$

Par conséquent, en utilisant le rappel avec  $V = (X_1, T_1)$ , les variables  $T_1$  et  $X_1$  étant indépendantes, on obtient

$$\begin{aligned} G(u, y) &= \iint_0^\infty \mathbb{P}(-U_\tau \leq y, \tau < \infty | U_0 = u, T_1 = t, X_1 = x) \lambda e^{-\lambda t} dt dF_X(x) \\ &= \int_0^\infty \left[ \int_0^{u+ct} \mathbb{P}(-U_\tau \leq y, \tau < \infty | U_0 = u, T_1 = t, X_1 = x) dF_X(x) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt + \int_0^\infty \left[ \int_{u+ct}^{y+u+ct} dF_X(x) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^\infty \left[ \int_0^{u+ct} \mathbb{P}(-U_\tau \leq y, \tau < \infty | U_0 = u + ct - x) dF_X(x) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \text{ par la propriété de Markov} \\ &\quad + \int_0^\infty [F_X(y + u + ct) - F_X(u + ct)] \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^\infty \left[ \int_0^{u+ct} G(u + ct - x, y) dF_X(x) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt + \int_0^\infty [F_X(y + u + ct) - F_X(u + ct)] \lambda e^{-\lambda t} dt. \end{aligned}$$

On pose  $s = u + ct$ , d'où  $ds = cdt$  et donc

$$\begin{aligned} G(u, y) &= \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \left[ \int_0^s G(s-x, y) dF_X(x) \right] e^{-\frac{\lambda(s-u)}{c}} ds + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty [F_X(y+s) - F_X(s)] e^{-\frac{\lambda(s-u)}{c}} ds \\ &= \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^\infty \left[ \int_0^s G(s-x, y) dF_X(x) + [F_X(y+s) - F_X(s)] \right] e^{-\frac{\lambda s}{c}} ds \end{aligned}$$

Dérivons par rapport à  $u$  en utilisant  $\partial_u \int_u^\infty K(v)dv = -K(u)$

$$\begin{aligned}\partial_u G(u, y) &= \frac{\lambda}{c} G(u, y) - \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \left[ \int_0^u G(u-x, y) e^{-\frac{\lambda x}{c}} dF_X(x) + [F_X(y+u) - F_X(u)] e^{-\frac{\lambda u}{c}} \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} G(u, y) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u G(u-x, y) dF_X(x) - \frac{\lambda}{c} [F_X(y+u) - F_X(u)]\end{aligned}$$

□

**Théorème 3.5.14.** *La fonction  $G(0, y)$  vérifie pour  $y \geq 0$*

$$G(0, y) = \frac{\lambda}{c} \int_0^y [1 - F_X(x)] dx$$

En prenant la limite quand  $y \rightarrow +\infty$  on obtient alors :

**Corollaire 3.5.15.**  *$\psi(0)$  vérifie l'équation*

$$\psi(0) = \frac{1}{\theta + 1}.$$

Ce résultat est étonnant, car partant d'un capital nul la probabilité de ruine ne semble pas dépendre de la loi de  $X$ , ni de  $\lambda$  mais juste de  $\theta$ . En fait  $\theta$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  sont liés par la valeur de la prime  $c = (1 + \theta)\lambda\mu$ .

*Démonstration.* En prenant la limite quand  $y \rightarrow +\infty$  on obtient

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [1 - F_X(x)] dx = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{\theta + 1}.$$

□

*Démonstration.* On remarque que comme pour tout  $y \geq 0$

$$0 \leq G(u, y) \leq \psi(u) \leq e^{-\rho u}$$

on a

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u, y) = 0.$$

Par conséquent, en intégrant l'expression du théorème précédent, on a

$$G(v, y) = - \int_v^\infty \partial_u G(u, y) du.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}G(0, y) &= -\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty G(u, y) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_0^u G(u-x, y) dF_X(x) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [F_X(y+u) - F_X(u)] du \\ &= -\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty G(u, y) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \left[ \int_x^\infty G(u-x, y) du \right] dF_X(x) + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [F_X(y+u) - 1 + 1 - F_X(u)] du\end{aligned}$$

On pose  $r = u - x$  ( $dr = du$ ) et donc

$$G(0, y) = \underbrace{-\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty G(u, y) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty G(r, y) dr \right] dF_X(x)}_{=0} + \frac{\lambda}{c} \left[ - \int_y^\infty (1 - F_X(u)) du + \int_0^\infty (1 - F_X(u)) du \right].$$

□

On peut démontrer de la même manière le théorème suivant

**Théorème 3.5.16.** *La fonction  $G(u, y)$  vérifie pour  $y, u \geq 0$*

$$G(u, y) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u G(u-x, y)[1 - F_X(x)]dx + \frac{\lambda}{c} \int_u^{u+y} [1 - F_X(x)]dx.$$

En prenant la limite quand  $y \rightarrow +\infty$  on obtient alors :

**Corollaire 3.5.17.**  *$\psi(u)$  vérifie l'équation*

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-x)[1 - F_X(x)]dx + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty [1 - F_X(x)]dx.$$

**Exemple 3.5.18.** Supposons que les pertes individuelles sont exponentielles de moyenne  $\mu$ . D'après le Corollaire 3.5.13, la probabilité de perte vérifie

$$\begin{aligned} \psi'(u) &= \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{\mu c} \int_0^u \psi(u-x)e^{-\frac{x}{\mu}} dx - \frac{\lambda}{c}e^{-\frac{u}{\mu}} \\ &= \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c\mu}e^{-\frac{u}{\mu}} \int_0^u \psi(z)e^{\frac{z}{\mu}} dz - \frac{\lambda}{c}e^{-\frac{u}{\mu}} \end{aligned}$$

Dérivons cette expression, la fonction  $\psi$  vérifie l'équation

$$\begin{aligned} \psi''(u) &= \frac{\lambda}{c}\psi'(u) + \frac{\lambda}{c\mu^2}e^{-\frac{u}{\mu}} \int_0^u \psi(z)e^{\frac{z}{\mu}} dz - \frac{\lambda}{c\mu}e^{-\frac{u}{\mu}}\psi(u)e^{\frac{u}{\mu}} + \frac{\lambda}{c\mu}e^{-\frac{u}{\mu}} \\ &= \frac{\lambda}{c}\psi'(u) + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \psi'(u) \right) - \frac{\lambda}{c\mu}\psi(u) \\ &= \frac{\lambda\mu - c}{\mu c}\psi'(u). \end{aligned}$$

Comme  $c = (1 + \theta)\lambda\mu$ , on a

$$\psi''(u) = \frac{-\theta}{(1 + \theta)\mu}\psi'(u).$$

On intègre deux fois et on obtient

$$\psi(u) = c_1 + c_2 \frac{(1 + \theta)\mu}{\theta} e^{\frac{-\theta u}{(1 + \theta)\mu}}.$$

Comme  $\psi(0) = \frac{1}{\theta + 1}$  et  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$ , on a

$$c_1 = 0 \text{ et } c_2 = \frac{\theta}{\mu(1 + \theta)^2}.$$

Par conséquent, si  $X$  est exponentielle de moyenne  $\mu$ , on a

$$\psi(u) = \frac{1}{(1 + \theta)} e^{\frac{-\theta u}{(1 + \theta)\mu}}.$$

Si par exemple, on suppose que les pertes sont exponentielles et que le capital initial de la compagnie est  $u$ , on cherche  $\theta$  de façon à ce que la probabilité de ruine soit égale à  $\alpha = 0.5$ .

Par conséquent on cherche  $\theta$  tel que

$$\frac{1}{(1 + \theta)} e^{\frac{-\theta u}{(1 + \theta)\mu}} = 0.5$$

La valeur de  $\theta$  sera obtenue de façon numérique avec Excel ou R.

### 3.5.5 Perte cumulée maximale

Partons d'un capital initial  $u$ , la probabilité que le capital passe sous la valeur  $u$  est  $\psi(0)$  par invariance par translation du problème. Sachant que l'on est passé sous la valeur  $u$ , on note  $Y$  l'amplitude de cette chute.

**Propriété 3.5.19.** *La loi de l'amplitude  $Y$  d'une chute sachant que le surplus est passé sous le capital initial  $u$  ne dépend pas de  $u$  et a pour densité la loi d'équilibre*

$$f_e(x) = \frac{1}{\mu}(1 - F_X(x)).$$

*Démonstration.* La probabilité d'avoir une chute sous le capital initial d'amplitude d'au plus  $y$  est

$$G(0, y) = \frac{\lambda}{c} \int_0^y [1 - F_X(x)] dx = \frac{1}{1 + \theta} \int_0^y \left[ \frac{1 - F_X(x)}{\mu} \right] dx$$

Comme la probabilité de passer sous le capital initial est  $\psi(0) = 1/(1 + \theta)$ , la probabilité d'avoir une chute d'amplitude au plus  $y$  sachant que l'on est passé sous le capital initial est

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{G(0, y)}{\psi(0)} = \int_0^y f_e(x) dx$$

où  $f_e(x) = (1 - F_X(x))/\mu$  est la loi d'équilibre. □

Étudions maintenant la probabilité de ruine partant d'un capital initial  $u$ . Supposons qu'après le premier passage sous le niveau  $u$ , le capital fait une chute d'amplitude  $y$ . Soit  $y > u$  et alors il y a ruine (avec probabilité  $\mathbb{P}(Y > u) = \int_u^\infty f_e(x) dx$ , soit  $y \leq u$  et la compagnie n'est pas ruinée. Si  $y \leq u$  on recommence le processus partant d'un capital  $u - y$ . Par ailleurs ce qui se passe après la première chute est indépendant de ce qui se passait avant du fait que notre processus est markovien. La probabilité que le capital passe par la suite sous le niveau  $u - y$  est  $\psi(0)$  et la loi de l'amplitude de la seconde chute est  $f_e$ .

Le nombre  $K$  total de "chute" suit par conséquent une loi géométrique de paramètre  $\beta = 1/\theta$  :

$$\mathbb{P}(K = 0) = 1 - \psi(0)$$

$$\mathbb{P}(K = 1) = [1 - \psi(0)]\psi(0)$$

$$\mathbb{P}(K = k) = [1 - \psi(0)]\psi(0)^k = \frac{\theta}{1 + \theta} \left( \frac{1}{1 + \theta} \right)^k.$$

Juste après chaque chute, le surplus croît grâce à la prime, par conséquent le plus bas niveau du surplus est  $u - L$  où  $L$  est la somme cumulée des chutes.  $L$  est appelé la **perte cumulée maximale**.

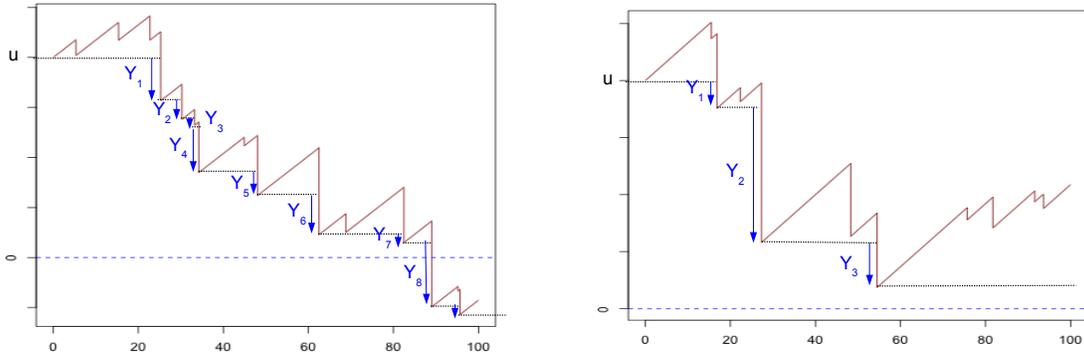
Si on note  $Y_j$  la suite des amplitudes des pertes, les  $Y_j$  sont indépendants et de loi  $f_e$  et on a

$$L = Y_1 + \dots + Y_K$$

$L$  est donc une somme composée géométrique.

On a clairement

$$\phi(u) = \mathbb{P}(L \leq u) \quad \text{et} \quad \psi(u) = \mathbb{P}(L > u).$$



**Théorème 3.5.20.** (Décomposition de Ladder-Height)

La probabilité de ruine à horizon infini est la fonction de survie d'une somme géométrique de paramètre  $\beta = 1/\theta$  de variables  $Y_i$  indépendantes de loi d'équilibre  $f_e(x) = (1 - F_X(x))/\mu$  :

$$\psi(u) = \mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_K > u).$$

La quantité  $L = Y_1 + \dots + Y_K$  représente la perte maximale. Ceci donne analytiquement,

$$\psi(u) = \frac{\theta}{1 + \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \theta} \right)^n S_e^{*n}(u) \quad \text{avec } S_e(u) = \int_u^{\infty} f_e(x) dx.$$

De même, la probabilité de survie

$$\phi(u) = \frac{\theta}{1 + \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \theta} \right)^n F_e^{*n}(u) \quad \text{avec } F_e(u) = \int_0^u f_e(x) dx.$$

De façon numérique, cette méthode est facile à implémenter pour calculer la probabilité de ruine. On peut soit l'utiliser via la loi des grands nombres en faisant plusieurs expériences pour obtenir une valeur approchée de la probabilité de ruine : chaque expérience consiste à simuler  $K$  selon une géométrique de paramètre  $\beta = 1/\theta$ , puis simuler le bon nombre de variables  $Y$  selon la loi  $f_e(x) = \frac{1 - F_X(x)}{\mu}$  et enfin à regarder si  $Y_1 + \dots + Y_K > u$ . L'autre façon d'utiliser cette méthode est d'utiliser l'algorithme récursif de Panjer pour calculer la loi de  $Y_1 + \dots + Y_K$  et en déduire sa fonction de survie.

**Exemple 3.5.21.** Supposons que les pertes individuelles suivent une loi de Pareto avec  $\alpha = 3$  et de moyenne 500. Prenons  $\theta = 0.2$ . Calculons la probabilité de survie en utilisant le résultat précédent. On a

$$f_e(x) = \frac{1 - F_X(x)}{\mu} = \frac{1 - \left[ 1 - \left( \frac{1000}{1000 + u} \right)^3 \right]}{500} = \frac{1}{500} \left( \frac{1000}{1000 + u} \right)^3$$

est la densité d'une pareto avec  $\alpha = 2$  et de moyenne 1000. On utilise l'algorithme de Panjer (après discrétisation de la loi de Pareto) pour évaluer la loi de la somme composé  $Y_1 + \dots + Y_K$  où  $K$  suit la loi géométrique de paramètre  $\beta = 1/\theta = 5$ . On obtient ainsi la probabilité de ruine en fonction de  $u$  en calculant numériquement la fonction de survie de  $Y_1 + \dots + Y_K$ .

On reviendra sur la simulation plus tard.

### 3.5.6 Valeur asymptotique de la probabilité de ruine

Notre but est d'estimer les valeurs de  $u$  (capital initial) et de  $\theta$  (prime) afin que la probabilité de ruine soit inférieure à un certain seuil  $\alpha$  et il n'y qu'un seul cas où on a pu calculer explicitement la probabilité de ruine (lorsque les pertes sont exponentielles). On va dans cette partie donner des approximations de la probabilité de ruine qui nous permettrons de répondre à la question initiale.

#### Approximation de Cramer

**Théorème 3.5.22.** *Considérons des pertes dont la génératrice des moments existe. Soit  $\rho$  le coefficient d'ajustement de Lundberg :*

$$M_X(\rho) = 1 + (1 + \theta)\mu\rho.$$

Alors la probabilité de ruine vérifie

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{C e^{-\rho u}} = 1 \text{ avec } C = \frac{\mu\theta}{M'_X(\rho) - \mu(1 + \theta)}.$$

Autrement dit,  $\psi(u) \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} C e^{-\rho u}$ .

**Exemple 3.5.23.** Considérons des pertes exponentielles de moyenne  $\mu$ . On sait que

$$\rho = \frac{\theta}{(1 + \theta)\mu} \text{ et } \psi(u) = \frac{1}{(1 + \theta)} e^{-\frac{\theta u}{(1 + \theta)\mu}}.$$

Par ailleurs, pour  $z < 1/\mu$

$$M_X(z) = \frac{1}{1 - \mu z} \quad M'_X(z) = \frac{\mu}{(1 - \mu z)^2}.$$

On a donc

$$C = \frac{\mu\theta}{\frac{\mu}{(1 - \mu\rho)^2} - \mu(1 + \theta)} = \frac{\theta}{(1 + \theta)^2 - (1 + \theta)} = \frac{1}{1 + \theta}.$$

L'approximation de Cramer donne dans cet exemple la vraie valeur de la probabilité de ruine :

$$\psi(u) \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{1 + \theta} e^{-\frac{\theta u}{(1 + \theta)\mu}}.$$

**Exemple 3.5.24.** Supposons que les pertes suivent une loi Gamma ( $\alpha = 2, \beta$ ) et  $\theta = 2$ . On avait déjà obtenu le coefficient de Lundberg :

$$\rho = \frac{1}{2\beta}.$$

Par ailleurs, pour  $\mu = 2\beta$  et pour  $z < 1/\beta$

$$M_X(z) = \left( \frac{1}{1 - \beta z} \right)^2 \quad M'_X(z) = \frac{2\beta}{(1 - \beta z)^3}.$$

D'où  $M'_X(\rho) = 16\beta$  et

$$C = \frac{4\beta}{16\beta - 6\beta} = \frac{2}{5} \text{ et } \psi(u) \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{5} e^{-\frac{u}{2\beta}}.$$

**Application 3.5.25.** Une compagnie d'assurance souhaite avoir une probabilité de ruine de 1%. Les pertes sont Gamma ( $\alpha = 2, \beta$ ) et  $\theta = 2$ . Cherchons la valeur de  $u$  satisfaisant cette exigence. On doit avoir

$$\frac{2}{5} e^{\frac{-u}{2\beta}} = 0.01 \Leftrightarrow u = -2\beta \ln(0.025).$$

Si la moyenne des pertes est 500, alors  $\beta = 250$  et  $u = 1844.44$ .

Une autre question serait de se fixer  $u = 2000$  et se demander quelle valeur moyenne des pertes permet d'avoir une probabilité de ruine  $\psi(2000) = 0.01$ . Il faut

$$\frac{2}{5} e^{\frac{-1000}{\beta}} = 0.01 \Leftrightarrow \beta = \frac{-1000}{\ln(0.025)} = 271,085,$$

soit  $\mu = 542,17$ .

Le souci de cet approximation est qu'elle ne peut pas être utilisée dans certaines situations. En effet dès que la loi des pertes est à queues lourdes, la fonction génératrice des moments n'existe pas. On va donc voir une seconde approximation de la probabilité de ruine.

### Approximation pour des pertes de fonction d'équilibre sous-exponentielle

On considère dans cette section des pertes dont la loi d'équilibre est sous-exponentielle, i.e. la loi du maximum  $\max_{i \in \{1, \dots, n\}} Y_i$  et la loi de la somme  $\sum_{i=1}^n Y_i$  sont les mêmes pour  $n$  grand (Voir la section 7 du chapitre 1 sur les lois de probabilité).

**Théorème 3.5.26.** *On considère des pertes telles que la loi d'équilibre  $f_e(x) = \frac{1-F_X(x)}{\mu}$  est sous-exponentielle. Alors*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - F_e(u)} = \frac{1}{\theta}$$

ce qui signifie,  $\psi(u) \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1-F_e(u)}{\theta}$ .

Dans ce cas, la décroissance n'est pas exponentielle, mais beaucoup plus lente.

**Remarque 3.5.27.** *La condition est sur la loi d'équilibre et non sur la loi de  $X$ . Il se peut que  $F_X$  soit sous-exponentielle et pas  $f_e$ , mais en général ça marche :*

- LogNormale
- Pareto
- Burr
- LogGamma.

**Exemple 3.5.28.** Supposons que les pertes suivent la loi de Pareto ( $\alpha, \beta$ ), calculons  $f_e$  :

$$f_e(x) = \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha-1}} \left( \frac{\beta}{\beta+x} \right)^\alpha = \frac{(\alpha-1)\beta^{\alpha-1}}{(\beta+x)^\alpha}.$$

On remarque que  $f_e \sim \text{Pareto}(\alpha-1, \beta)$ , par conséquent  $1 - F_e(x) = \left( \frac{\beta}{\beta+x} \right)^{\alpha-1}$  et donc

$$\psi(u) \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\theta} \left( \frac{\beta}{\beta+u} \right)^{\alpha-1}.$$

La probabilité de ruine décroît de façon polynomiale.

Si on se fixe une probabilité de ruine égale à  $p$ , il faut que

$$\theta = \frac{1}{p} \left( \frac{\beta}{\beta + u} \right)^{\alpha-1} \quad \text{et} \quad u = \beta(\theta p)^{-1/(\alpha-1)} - \beta.$$

Pour  $\theta = 2$ ,  $\alpha = 3$  et  $\beta = 1000$ , pour avoir  $\psi(u) = 0.01$  il faut  $u = 6071,067$ .

Pour  $u = 10\,000$ ,  $\alpha = 3$  et  $\beta = 1000$ , pour avoir  $\psi(u) = 0.01$  il faut  $\theta = 0.82$ .

Pour  $\theta = 2$ ,  $u = 10\,000$  et  $\alpha = 3$ , pour avoir  $\psi(u) = 0.01$  il faut  $\beta = \frac{u}{(\theta p)^{-1/(\alpha-1)} - 1} = 1647,16$ , soit  $\mu = 823,58$ .

## 3.6 Approximation du surplus en temps continu par un mouvement brownien

### 3.6.1 Approximation par le mouvement brownien

Rappelons brièvement ce qu'est un mouvement brownien (voir notes de cours sur Studium pour plus d'informations).

**Définition 3.6.1.** Soit  $W = (W_t, t \geq 0)$  une famille de variables indexées par le temps. On dit que  $W$  est un mouvement brownien de coefficient de diffusion  $\sigma^2$  si c'est un processus continu à accroissements indépendants et stationnaires tel que

1.  $W_0 = 0$ ,
2.  $\forall t \geq 0, W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$ .

Quand  $\sigma = 1$ , on parle de mouvement brownien standard.

Un mouvement brownien avec dérive  $\nu$  est

$$B_t = \nu t + W_t.$$

L'idée dans cette partie est d'approcher le surplus  $U_t$  par un brownien avec dérive de la forme  $u + B_t$ . On considère le processus de surplus

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

où

- $u$  représente le capital initial,
- $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ ,
- $X_i$  i.i.d. d'espérance  $\mu$  et indépendants de  $N$ ,
- $c = (1 + \theta)\lambda\mu$  est la prime par unité de temps.

Introduisons  $Z_t = U_t - u$ . On a  $Z_0 = 0$  et

$$\mathbb{E}[Z_t] = (c - \lambda\mu)t \quad \text{et} \quad \text{Var}(Z_t) = \lambda\mathbb{E}[X^2]t.$$

Posons  $\nu = c - \lambda\mu$  et  $\sigma^2 = \lambda\mathbb{E}[X^2]$  et on introduit

$$D_t = u + B_t = u + \nu t + W_t,$$

où  $W$  est un mouvement brownien de diffusion  $\sigma^2$ .

Regardons maintenant ce qui se passe lorsque le taux de saut tend vers l'infini et que l'amplitude des sauts tend vers zéro. On a de plus en plus de sauts de hauteur de plus en plus petite. Notre but est de montrer que le processus tend alors vers un mouvement brownien avec dérive.

$\nu$  et  $\sigma^2$  sont maintenant fixés et on pose

$$\lambda = \frac{\sigma^2}{\mathbb{E}[X^2]} \quad c = \nu + \frac{\sigma^2 \mu}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

avec  $X = \alpha Y$ , d'où

$$\lambda = \frac{\sigma^2}{\alpha^2 \mathbb{E}[Y^2]} \quad c = \nu + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}[Y]}{\alpha \mathbb{E}[Y^2]}.$$

Quand  $\alpha \rightarrow 0$ , on a alors

$$X \rightarrow 0 \quad , \quad \lambda \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad c \rightarrow \infty.$$

Regardons maintenant comment se comporte le processus  $Z_t = U_t - u$  :

$$\begin{aligned} M_{Z_t}(z) &= \mathbb{E}\left[e^{z(ct - S_t)}\right] = e^{zct + \lambda t [M_X(-z) - 1]} \\ &= e^{zct + \lambda t [M_Y(-\alpha z) - 1]} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \ln M_{Z_t}(z) &= czt + \lambda t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left[(-\alpha z Y)^k\right]}{k!} \\ &= (c - \lambda \alpha \mathbb{E}[Y])zt + \lambda t \alpha^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{k-2} z^k}{k!} \mathbb{E}[Y^k] \\ &= z\nu t + \frac{\sigma^2 t}{\mathbb{E}[Y^2]} \left[ \frac{z^2}{2} \mathbb{E}[Y^2] + \alpha \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{k-3} z^k}{k!} \mathbb{E}[Y^k] \right] \\ &\xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} z\nu t + \frac{\sigma^2 t z^2}{2} \end{aligned}$$

Par conséquent,  $M_{Z_t}(z) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} e^{z\nu t + \frac{\sigma^2 t z^2}{2}}$ , i.e.  $Z_t$  converge en loi quand  $\alpha \rightarrow 0$  vers  $\mathcal{N}(\nu t, \sigma^2 t)$ . On peut montrer qu'en fait le processus  $Z_t = U_t - u$  converge en loi vers le brownien avec dérive  $B_t = \nu t + W_t$ .

### 3.6.2 Probabilité de ruine pour un mouvement brownien

On a des résultats précis de la probabilité de ruine pour un mouvement brownien à horizon fini et à horizon infini.

**Théorème 3.6.2.** *Soit  $u \geq 0$  et  $t > 0$ . On considère  $D_t = u + B_t$  où  $B$  est un mouvement brownien avec dérive  $\nu$  et diffusion  $\sigma^2$ .*

*On note  $\tau = \inf\{t \geq 0 : D_s < 0\}$  l'instant de ruine. On a alors*

$$\psi(u, t) = \mathbb{P}\left(\inf_{0 \leq s \leq t} D_s < 0\right) = \mathbb{P}(\tau \leq t) = \Phi\left(-\frac{u + \nu t}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) + e^{\frac{-2\nu u}{\sigma^2}} \Phi\left(-\frac{u - \nu t}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right),$$

où  $\Phi(x)$  est la fonction de répartition d'une variable  $\mathcal{N}(0,1)$ .

*En faisant tendre  $t \rightarrow +\infty$ , on a la probabilité de ruine à horizon infini*

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\tau < \infty) = e^{\frac{-2\nu u}{\sigma^2}}.$$

Pour la preuve voir Loss Models.

**Corollaire 3.6.3.** *L'instant de ruine partant d'un capital initial  $u$  a pour fonction de répartition*

$$\mathbb{P}(\tau \leq t | \tau < \infty) = \frac{\psi(u, t)}{\psi(u)} = e^{\frac{2\nu u}{\sigma^2}} \Phi\left(-\frac{u + \nu t}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) + \Phi\left(-\frac{u - \nu t}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right).$$

En dérivant l'expression, on obtient que la densité de  $\tau$  est

$$f_\tau(t) = \frac{u}{\sigma\sqrt{2\pi}} t^{-3/2} e^{-\frac{(u-\nu t)^2}{2\sigma^2 t}}.$$

La loi de  $\tau$  est une inverse gaussienne de moyenne  $\frac{u}{\nu}$  et de variance  $\frac{u\sigma^2}{\nu^3}$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} f_\tau(t) &= \left(\frac{u}{2\sigma} t^{-3/2} - \frac{\nu}{2\sigma} t^{-1/2}\right) \Phi'\left(-\frac{u + \nu t}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) e^{\frac{2\nu u}{\sigma^2}} + \left(\frac{u}{2\sigma} t^{-3/2} - \frac{\nu}{2\sigma} t^{-1/2}\right) \Phi'\left(-\frac{u - \nu t}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) \\ &= \frac{t^{-3/2}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} (u - \nu t) e^{-\frac{(u+\nu t)^2}{2\sigma^2 t}} e^{\frac{2\nu u}{\sigma^2}} + \frac{t^{-3/2}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} (u + \nu t) e^{-\frac{(u-\nu t)^2}{2\sigma^2 t}} \\ &= \frac{t^{-3/2}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\nu t)^2}{2\sigma^2 t}} ((u - \nu t) + (u + \nu t)) \\ &= \frac{u}{\sigma\sqrt{2\pi}} t^{-3/2} e^{-\frac{(u-\nu t)^2}{2\sigma^2 t}}. \end{aligned}$$

□

**Exemple 3.6.4.** On considère un surplus

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

où

- $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda = 10$ ,
- $X_i$  indépendantes de loi Gamma( $\alpha = 3, \beta = 100$ ),
- $c = 3\lambda\mu$  est la prime par unité de temps ( $\theta = 2$ ).

On veut trouver une valeur approchée de la probabilité de ruine.

On calcule alors

$$\nu = c - \lambda\mu = 6000 \quad \sigma^2 = 10 \times 6 \times \beta^2 = 1\,200\,000.$$

Alors,

$$\psi(u) = e^{\frac{-2\nu u}{\sigma^2}} = e^{-0.01 u}.$$

On a donc  $\psi(100) = 0.368$ ,  $\psi(500) = 0.0067$  quand on considère  $U_t - c$  comme un mouvement brownien avec dérive (on peut avoir quelques doutes vu que la taille moyenne des sauts est 300!).

### 3.7 Approximation par simulation de la probabilité de ruine

Considérons le cas classique en temps continu :

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

où

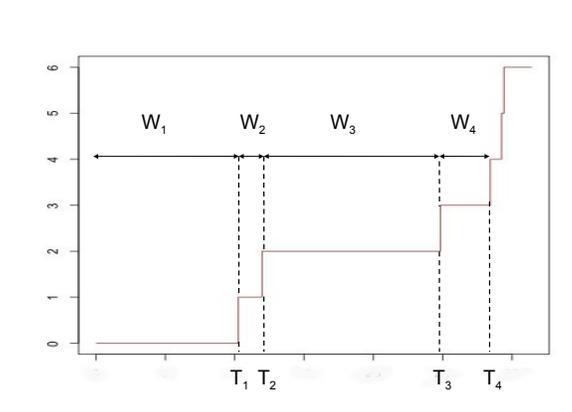
- $u$  représente le capital initial,
- $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ ,
- $X_i$  i.i.d. d'espérance  $\mu$  et indépendants de  $N$ ,
- $c = (1 + \theta)\lambda\mu$  est la prime par unité de temps.

#### 3.7.1 Simulation d'un processus de Poisson

Pour simuler des trajectoires du surplus  $U_t$ , on a besoin de simuler un processus de Poisson. Rappelons quelques résultats sur les instants de saut d'un processus de Poisson  $N$  d'intensité  $\lambda$ .

**Proposition 3.7.1.** *La suite des instants inter-arrivées  $(W_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$ .*

*Le  $n^{\text{ième}}$  instant de saut  $T_n = \sum_{i=1}^n W_i$  étant la somme de  $n$  variables indépendantes de loi exponentielle, suit la loi  $\text{Gamma}(n, \lambda)$ .*



Instants de saut d'un processus de Poisson.

Par conséquent si on veut simuler un processus de Poisson jusqu'à l'instant  $t$ , il suffit de simuler des variables exponentielles indépendantes jusqu'à ce que leur somme dépasse  $t$ .

Voici ce que donne le programme en R :

```
# Longueur de l'intervalle de temps
t=30
# Intensite du paramètre de Poisson
lambda=0.3
# Simulation des temps entre deux sauts
W=c(0)
while (sum(W)<t)
```

```
{W=c(W, rexp(1, lambda))}
# Calcul des instants de saut (on enlève la dernière valeur qui dépasse forcément t)
T=cumsum(W[-length(W)])
N=length(T)-1
plot(c(T,t), c((0:N), N), type="s", col="dark red", xlab=" ", ylab=" ")
```

Cette méthode de programmation est très intuitive, mais elle a l'inconvénient d'avoir une boucle *while* qui ralentit grandement le programme. On va voir maintenant une autre façon de simuler un processus de Poisson sur un intervalle de temps.

On considère le processus de Poisson sur l'intervalle  $[0, t]$ . Sur cet intervalle, le nombre de saut suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ . Connaissant le nombre de sauts, que peut-on dire de la loi des instants de sauts ?

Par exemple, sachant qu'il n'y a eu qu'un saut sur l'intervalle de temps  $[0, t]$ , quelle est la loi du premier instant de saut  $T_1$ . Cet instant est forcément inférieur à  $t$ . On a pour  $s \leq t$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 < s | N_t = 1) &= \frac{\mathbb{P}(T_1 < s, N_t = 1)}{\mathbb{P}(N_t = 1)} = \frac{\mathbb{P}(\text{avoir 1 saut sur } [0, s] \text{ et aucun saut sur } [s, t])}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{avoir 1 saut sur } [0, s]) \mathbb{P}(\text{avoir aucun saut sur } [s, t])}{\lambda t e^{-\lambda t}} \text{ par indépendance des accroissements} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t} \end{aligned}$$

Par conséquent la loi de  $T_1$  sachant que  $N_t = 1$  est la loi uniforme sur  $[0, t]$ .

**Définition 3.7.2.** *Considérons  $Y_1, \dots, Y_n$  des variables aléatoires. On définit la statistique d'ordre  $Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$  comme étant les variables réordonnées par ordre croissant :  $Y_{(k)}$  est la  $k^{\text{ème}}$  plus petite valeur parmi  $Y_1, \dots, Y_n$ .*

*On a  $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(n)}$ .*

**Proposition 3.7.3.** *Sachant que  $N_t = k$ , les instants de saut  $T_1, T_2, \dots, T_k$  ont la même loi que la statistique d'ordre d'un  $k$ -échantillon de loi uniforme sur  $[0, t]$  :  $(U_{(1)}, \dots, U_{(k)})$ .*

Ce résultat est très utile en simulation quand on veut simuler un processus de Poisson jusqu'à un instant choisi  $t$ . Le nombre de sauts sur cet intervalle de temps suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda t)$ . On simule par conséquent  $N \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ , puis on simule  $N$  variables uniforme sur  $[0, t]$  que l'on ordonne par ordre croissant pour avoir les instants de sauts de notre processus.

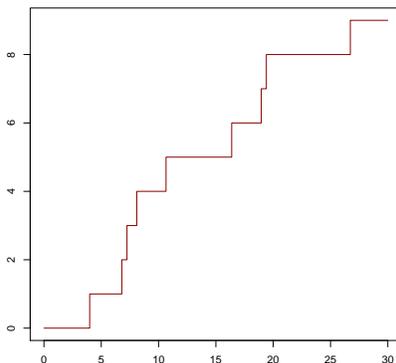
En R, cela donne le programme suivant :

```
# Longueur de l'intervalle de temps
t=30
# Intensité du paramètre de Poisson
lambda=0.3

# Simulation du nombre de sauts N sur l'intervalle [0,t]
N=rpois(1, lambda*t)
# Simulation de N variables uniforme sur [0,t] indépendantes
U=runif(N, min=0, max=t)
# Ordonnement les variables uniformes par ordre croissant
T=sort(U)
```

```
# Dessin d'une realisation du processus de Poisson sur l'intervalle [0,t]
plot(c(0,T,t),c(0:N,N),type="s",col="dark red",
xlab="Temps",ylab="Processus de Poisson",
main="Trajectoire d'un processus de Poisson d'intensite 0.3")
```

Voici le résultat :



Trajectoire sur  $[0,30]$  d'un processus de Poisson d'intensité  $\lambda = 0.3$ .

### 3.7.2 Simulation d'un processus de Poisson composé

Passer d'une la simulation d'un processus de Poisson à un processus de Poisson composé est très simple. Une fois qu'on a simulé le processus de Poisson, on connaît le nombre de saut sur l'intervalle  $[0, t]$ , on simule alors le nombre de variables  $X_i$  correspondantes. Voici ce que donne le programme si les  $X_i$  suivent une loi exponentielle :

```
t=30
lambda=2/10
# simulation du processus de Poisson
N=rpois(1,lambda*t)
U=runif(N,min=0,max=t)
T=sort(U)
# simulation des pertes
X=rexp(N,1/3)
Z=cumsum(X)
Z=c(0,Z,Z[N])
plot(c(0,T,t),Z,type="s",col="dark red",xlab=" ",ylab=" ")
```

Quand la loi des pertes fait partie des lois usuelles, il suffit d'utiliser la fonction de R correspondante. Par contre, si la loi des pertes n'est pas une loi usuelle, on peut simuler les variables  $X$  est utilisant l'inverse de la fonction de répartition. En effet :

**Proposition 3.7.4.** *Soit  $X$  une variable de fonction de répartition  $F_X$  et  $U$  une variable uniforme sur  $[0, 1]$ , alors  $F_X^{-1}(U)$  a pour loi  $F_X$ .*

*Démonstration.* Calculons la fonction de répartition de  $F_X^{-1}(U)$  :

$$\mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x)) = F_X(x)$$

car  $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ . □

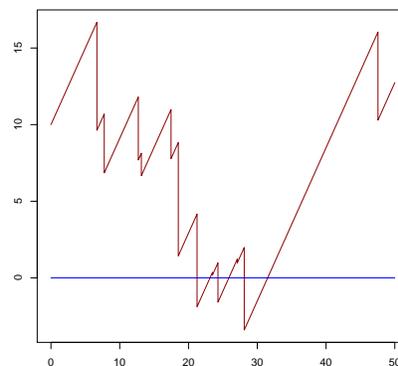
### 3.7.3 Simulation du surplus

Une fois que l'on a simulé le processus de Poisson composé, pour simuler une trajectoire du surplus il faut intégrer la prime. La procédure n'est pas simple, mais s'applique à n'importe quelle loi de pertes.

```
t=100
lambda=0.3
mu=3
u=10
theta=0.5
# calcul de la prime
c=(1+theta)*lambda*mu
# Simulation du processus de Poisson et de ses instants de saut
N=rpois(1,lambda*t)
U=runif(N,min=0,max=t)
Tsaut=sort(U)
Tsaut=c(0,Tsaut)
# Simulation des pertes selon la loi exponentielle
X=rexp(N,rate=1/mu)
X=c(0,X)

# Surplus à chaque instant de saut
S=u+c*Tsaut-cumsum(X)
```

Voici le résultat lorsqu'on complique légèrement le programme afin de tracer la trajectoire entre chaque instant de saut :



Une trajectoire du surplus.

### 3.7.4 Calcul approché de la probabilité de ruine

#### Première méthode :

On a vu de façon théorique diverses façons d'approcher la probabilité de ruine. L'une de ces méthodes consiste à approcher par calculs numériques la loi de la perte cumulée maximale

$$\psi(u) = \mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_K > u).$$

où  $K$  suit la loi géométrique de paramètre  $\beta = 1/\theta$  et variables  $Y_i$  sont indépendantes et identiquement distribuées de loi d'équilibre  $f_e(x) = (1 - F_X(x))/\mu$ . Afin d'utiliser ce résultat, il faut calculer la loi d'équilibre, la discrétiser si besoin et enfin utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer  $\psi(u)$ . Ce résultat est très intéressant pour estimer la probabilité de ruine à horizon infini, mais difficile à utiliser à horizon fini.

**Exemple 3.7.5.** On suppose que  $\theta = 0.5$ ,  $u = 10$ ,  $\lambda = 2$  et que les pertes suivent une loi de Weibull( $\beta, \tau$ ) avec  $\beta = 5$  et  $\tau = 2$ . On va calculer la probabilité de ruine à horizon infini  $\psi(10) = \mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_K > 10)$ . Calculons tout d'abord la loi d'équilibre : on a

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\tau} \quad \text{et} \quad \mu = \mathbb{E}[X] = \beta\Gamma(1 + 1/\tau)$$

d'où

$$f_e(x) = \frac{1 - F_X(x)}{\mu} = \frac{e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\tau}}{\beta\Gamma(1 + 1/\tau)}.$$

Pour calculer  $\psi(10) = \mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_K > 10)$  par Panjer, il faut calculer la fonction de répartition de  $f_e$  :

$$\begin{aligned} F_e(x) &= \frac{1}{\mu} \int_0^x e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)^\tau} dy \quad \text{on pose } z = \left(\frac{y}{\beta}\right)^\tau \text{ d'où } y = \beta z^{1/\tau} \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\tau} e^{-z} \frac{\beta^\tau}{\tau} (\beta z^{1/\tau})^{1-\tau} dz \\ &= \frac{\beta}{\tau\mu} \int_0^{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\tau} e^{-z} z^{1/\tau-1} dz \\ &= \frac{1}{\tau\Gamma(1 + 1/\tau)} \Gamma\left(\frac{x^\tau}{\beta^\tau}, \frac{1}{\tau}\right) \end{aligned}$$

où  $\Gamma(x, \alpha) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ . Comme  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ , on a

$$F_e(x) = \frac{1}{\Gamma(1/\tau)} \Gamma\left(\frac{x^\tau}{\beta^\tau}, \frac{1}{\tau}\right)$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi Gamma( $1, 1/\tau$ ) prise au point  $x^\tau/\beta^\tau$ . On discrétise alors la loi d'équilibre pour utiliser Panjer :

$$f^h(k) = F_e(kh - h/2) - F_e(kh + h/2).$$

### Seconde méthode :

Une autre méthode consiste à simuler différentes trajectoires  $U^i$  du surplus sur l'intervalle  $[0, t]$ . On note  $\tau^i$  l'instant de ruine de la  $i^{\text{ème}}$  trajectoire. On estime alors la probabilité de ruine par la méthode dite de Monte-Carlo (méthode basée sur la loi des grands nombres) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{U^i \text{ passe sous zéro sur l'intervalle } [0, t]\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau^i < t\}} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau < t\}}] = \psi(u, t)$$

où  $\tau^i$  est l'instant de ruine du  $i^{\text{ème}}$  surplus  $U^i$ .

Par conséquent, pour chaque trajectoire on regarde s'il y a ruine et le nombre moyen de ruine sur  $n$  simulations est proche de la probabilité de ruine sur l'intervalle  $[0, t]$ . Pour calculer la valeur de  $\mathbb{1}_{\{\tau < t\}}$ , il suffit de regarder le surplus aux instants de saut du processus de Poisson  $T_k$  et il y a ruine si l'une des valeurs est strictement négative :

$$\{\tau < t\} = \left\{ \min_k (U_{T_k}) < 0 \right\}.$$

Cette méthode sous estime la probabilité de ruine à horizon infini :

$$\psi(u, t) \leq \psi(u).$$

Un avantage de cette seconde méthode est de pouvoir construire un intervalle de confiance. En effet par le théorème limite central, on a

$$\frac{\sqrt{n}}{\hat{\sigma}_n^2} (\bar{\tau}_n - \psi(u, t)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1)$$

où  $\bar{\tau}_n$  et  $\hat{\sigma}_n^2$  sont respectivement la moyenne et la variance empirique :

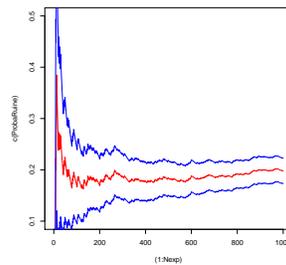
$$\bar{\tau}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau^i < t\}} \quad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbb{1}_{\{\tau^i < t\}} - \bar{\tau}_n)^2 = \bar{\tau}_n - (\bar{\tau}_n)^2$$

car  $\mathbb{1}_{\{\tau^i < t\}}$  sont des variables de Bernoulli. Un intervalle de confiance au niveau  $1 - \alpha$  de  $\psi(u, t)$  est par conséquent :

$$\left[ \bar{\tau}_n - z_\alpha \sqrt{\frac{\bar{\tau}_n(1 - \bar{\tau}_n)}{n}}, \bar{\tau}_n + z_\alpha \sqrt{\frac{\bar{\tau}_n(1 - \bar{\tau}_n)}{n}} \right]$$

avec  $\mathbb{P}(Z \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$  où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Exemple 3.7.6.** Utilisons cette seconde méthode pour approcher la probabilité de ruine. En utilisant les programmes précédents et en regardant l'évolution en fonction de  $n$  on obtient :



Evolution de  $\bar{\tau}_n$  (en rouge) et de son intervalle de confiance (en bleu) en fonction de  $n$ , avec  $t = 100$  et des pertes de Weibull.

Troisième méthode :

On peut combiner les deux méthodes en simulant plusieurs variables  $Y_1 + \dots + Y_K$  afin d'estimer la probabilité de ruine à horizon infini  $\psi(u) = \mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_K > u)$  par la méthode de Monte-Carlo. On a

$$\bar{\psi}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Y_1^i + \dots + Y_K^i > u\}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \psi(u) \text{ et } \sqrt{\frac{n}{\bar{\psi}_n(1 - \bar{\psi}_n)}} (\bar{\psi}_n - \psi(u)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1)$$

Par conséquent,

$$\left[ \bar{\psi}_n - z_\alpha \sqrt{\frac{\bar{\psi}_n(1 - \bar{\psi}_n)}{n}}, \bar{\psi}_n + z_\alpha \sqrt{\frac{\bar{\psi}_n(1 - \bar{\psi}_n)}{n}} \right]$$

avec  $\mathbb{P}(Z \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$  où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , est un intervalle de confiance au niveau  $1 - \alpha$  de  $\psi(u)$ .

# Chapitre 4

## Modèles pour les actifs financiers et mesures de risque

### 4.1 Modèles en finance

Lorsque le rendement est constant alors le prix d'une action vérifie  $S_t = S_0 e^{\delta t}$ . On se place ici dans un cadre plus général où le rendement est aléatoire et peut subir des sauts :

$$S_t = S_0 e^{B_t + J_t}$$

où

- $S_0$  est le prix initial,
- $B_t = \mu t + W_t$  est un mouvement brownien avec dérive  $\mu$  et volatilité  $\sigma$  qui représente la partie continue du rendement,
- $J_t = \sum_{i=0}^{N_t} X_i$  est un processus de Poisson composé, indépendant de  $B_t$ , avec  $X_i$  i.i.d. de loi  $F_X$  à support sur  $\mathbb{R}$  qui représente les sauts du rendement (les sauts peuvent être positifs ou négatifs (crash)).

La grande différence avec ce que l'on a vu concernant le surplus d'une compagnie d'assurance est qu'ici les sauts peuvent être à la fois positifs et négatifs. On ne peut notamment plus utiliser l'algorithme de Panjer pour trouver la loi de  $J_t$ .

On remarque que le processus des rendements  $R_t = B_t + J_t$  est un processus à accroissements indépendants et stationnaires car  $B_t$  et  $J_t$  le sont. Ceci signifie que les rendements dans l'intervalle  $[0, t]$  est la somme indépendante des rendements sur  $[0, s]$  et de ceux sur  $[s, t]$ .

#### 4.1.1 Premier Modèle : modèle sans saut

On considère le modèle sans saut (la composant  $J_t$  n'apparaît pas). On a

$$S_t = S_0 e^{B_t}$$

où  $B_t = \mu t + W_t$  est un mouvement brownien avec dérive :  $B_t \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$ . On connaît par conséquent le loi de  $S_t$  :

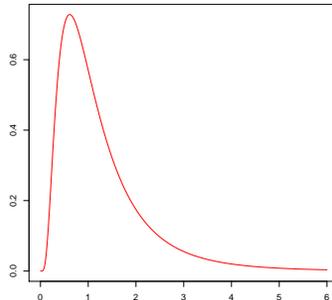
$$S_t \sim \text{Log-Normale}(\ln(S_0) + \mu t, \sigma^2 t).$$

On remarque  $S_t = S_0 e^{B_t - B_s + B_s} \stackrel{\text{Loi}}{=} S_0 e^{B_{t-s} + B_s} = S_{t-s} e^{B_s}$  pour tout  $0 \leq s \leq t$ .

Le choix de mettre une loi Log-Normale sur le montant des actifs vient du fait qu'on suppose les rendements i.i.d. (hypothèse malheureusement contestable) et donc par le théorème central limite la somme des rendements suit une loi normale.

Rappel : Une variable aléatoire  $X$  suit la loi log-normale de paramètre  $\mu$  et  $\sigma^2$  si la variable  $Y = \ln(X)$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . On a alors

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbf{1}_{x>0}, \quad \mathbb{E}[X] = e^\mu e^{\frac{\sigma^2}{2}}, \quad \text{Var}(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}.$$



Densité Log-Normale.

### Interprétation des paramètres

Si  $B_t \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$  alors  $\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})t}$ . Par conséquent si on change la paramétrisation en prenant plutôt  $B_t \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$ , on a alors

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{\mu t}$$

$\mu$  représente alors le rendement espéré (ou rendement moyen) par unité de temps.

**Propriété 4.1.1.** On considère  $S_t = S_0 e^{B_t}$  avec  $B_t \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$ , alors

- $\mu$  représente le rendement moyen par unité de temps,
- $\sigma$  représente la volatilité des rendements par unité de temps.

On peut réécrire le modèle sous la forme

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}Z} \quad \text{avec } Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

**Exemple 4.1.2.** Le prix d'aujourd'hui vaut 100 \$, le rendement espéré est  $\mu = 10\%$  par an, la volatilité est  $\sigma = 30\%$  par an.

Par conséquent sur une période de deux ans le rendement moyen et la volatilité sont

$$\mu t = 0.1 \times 2 = 0.2, \quad \sigma\sqrt{t} = 0.3 \times \sqrt{2} = 0.424$$

Le prix espéré est alors

$$\mathbb{E}[S_2] = 100e^{0.2} = 122.14 \$.$$

Le prix au bout de deux ans est

$$S_2 = 100e^{2(0.1 - \frac{0.3^2}{2}) + 0.3\sqrt{2}Z} = 111.63e^{0.424Z} \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Par conséquent, comme  $\mathbb{P}(Z < 0) = 1/2$ , on en déduit que le prix au bout de deux ans vérifie

$$\mathbb{P}(S_2 < 111,63) = 1/2.$$

Le prix a une chance sur deux d'être inférieur à 111.63.

De même, comme  $\mathbb{P}(Z > 1) = \mathbb{P}(Z < -1) = 0.1587$ , on a

$$\mathbb{P}(S_2 > 111.63 e^{0.424}) = \mathbb{P}(S_2 > 170.62) = 0.1587 \text{ et } \mathbb{P}(S_2 < 111.63 e^{-0.424}) = \mathbb{P}(S_2 < 73.03) = 0.1587.$$

Le prix  $S_2$  se trouvera donc entre 73.03 et 170.62 avec probabilité de 0.6826.

On a  $\mathbb{P}(|Z| < 1.96) = 0.95$  et donc

$$\mathbb{P}(49.43 < S_2 < 252.08) = 0.95.$$

Quand on veut évaluer  $\mathbb{P}(S_t < K)$  pour une valeur de  $K$  donnée il faut se ramener à la loi  $\mathcal{N}(0,1)$  et on a donc

$$\mathbb{P}(S_t < K) = \Phi\left(\frac{\ln(K) - \ln(S_0) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de  $\mathcal{N}(0,1)$ .

**Exemple 4.1.3.** Le prix d'une action vaut aujourd'hui 50 \$, le rendement moyen est 15% et la volatilité est 30% par an.

Le rendement moyen pour un mois est

$$(\mu - \sigma^2/2)t = (0.15 - 0.3^2/2) \times 1/12 = 0.00875$$

et la volatilité pour un mois

$$\sigma\sqrt{t} = 0.3\sqrt{1/12} = 0.0866.$$

On souhaite évaluer  $\mathbb{P}(S_{1/12} > 62.09 \$)$  :

$$\mathbb{P}(S_{1/12} > 62.09 \$) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(62.09) - \ln(50) - 0.00875}{0.0866}\right) = 1 - \Phi(2.3997) = 0.02275.$$

### Estimation des paramètres

En général on a les prix d'une action pour des périodes de longueur  $h = 1/N$  (prix journaliers, mensuels, annuels, ... ) :

$$S_0, S_h, S_{2h}, \dots \text{ avec } S_t = S_{t-h}e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})h + \sigma\sqrt{h}Z},$$

d'où

$$X = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-h}}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma\sqrt{h}Z \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h, \sigma^2h\right).$$

Alors  $\frac{1}{h}\bar{X}$  est un estimateur de  $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$  et  $\frac{1}{h}\hat{\sigma}_X^2$  est un estimateur de  $\sigma^2$ . On en déduit que  $\frac{1}{h}\left(\bar{X} + \frac{\hat{\sigma}_X^2}{2}\right)$  est un estimateur du rendement espéré  $\mu$ .

**Remarque 4.1.4.** *En général les rendements ne semblent pas suivre une loi Normale (ailes épaisses selon le coefficient de Kurtosis, Log-Histogramme n'est pas une parabole). En fait, les trajectoires de  $S_t$  ne sont pas vraiment continues.*

*Quand on suppose que la trajectoire est continue avec un rendement moyen de 15% et une volatilité de 20%, alors la probabilité d'avoir une baisse d'au moins 20% en une journée est*

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_{1/365}}{S_0} \leq 0.8\right) = \Phi\left(\frac{\ln(0.8) - \left(0.15 - \frac{0.2^2}{2}\right)/365}{0.2/\sqrt{365}}\right) = \Phi(-21.35) \simeq 0$$

*et pourtant ça arrive! (voir les crashes boursiers de 1987 ou de 2008).*

*Pour modéliser les crashes, un outil mathématique est d'introduire des sauts afin d'avoir des lois à queues épaisses.*

#### 4.1.2 Second modèle : modèle avec sauts

On considère le modèle

$$S_t = S_0 e^{B_t + J_t}$$

où

- $S_0$  est le prix initial,
- $B_t$  est un mouvement brownien avec dérive :  $B_t \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$ ,
- $J_t = \sum_{i=0}^{N_t} X_i$  est un processus de Poisson composé, indépendant de  $B_t$ , avec  $X_i$  i.i.d. de loi  $F_X$  à support sur  $\mathbb{R}$  et  $N_t$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ .

On note  $S_t^c = S_0 e^{B_t}$  la partie continue du prix. Dans ce modèle,  $S_t^c$  suit une loi Log-Normale mais pas  $S_t$ .

#### Cas particulier : l'amplitude des sauts suit la loi normale

Supposons que l'amplitude des sauts  $X_i$  suit la loi normale  $X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu_J - \frac{\sigma_J^2}{2}, \sigma_J^2\right)$ . Alors  $Y_i = e^{X_i}$  suit une loi Log-Normale et on peut écrire

$$Y_i = e^{X_i} = e^{\left(\mu_J - \frac{\sigma_J^2}{2}\right) + \sigma_J Z_i}$$

avec  $Z_i$  des variables indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0,1)$ . On a

$$S_t = S_0 e^{B_t} e^{\sum_{i=0}^{N_t} X_i} = S_t^c \prod_{i=0}^{N_t} Y_i.$$

Au  $k^{\text{ème}}$  instant de saut, le pourcentage de variation du prix vaut

$$\frac{S_{T_k} - S_{T_k^-}}{S_{T_k^-}} = \frac{Y_k S_{T_k^-} - S_{T_k^-}}{S_{T_k^-}} = Y_k - 1.$$

Donc en moyenne le prix saute de  $\mathbb{E}[Y_k - 1] = (e^{\mu_J} - 1)\%$ .

Si  $\mu_J > 0$  alors  $e^{\mu_J} - 1 > 0$ .

Si  $\mu_J < 0$  alors  $e^{\mu_J} - 1 < 0$ .

**Remarque 4.1.5.** Sachant que  $N_t = m$ , on a

$$e^{J_t^m} = \prod_{i=0}^m Y_i \sim \text{Log-Normale} \left( \left( \mu_J - \frac{\sigma_J^2}{2} \right) m, \sigma_J^2 m \right).$$

Étudions maintenant la loi de  $S_t$  : sachant que  $N_t = m$ , on a

$$S_t \stackrel{\text{Loi}}{=} S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\sqrt{t}Z} e^{(\mu_J - \frac{\sigma_J^2}{2})m + \sigma_J \sum_{i=1}^m Z_i}$$

avec  $Z$  et  $Z_i$  des variables indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0,1)$ .

Par conséquent,  $\mathcal{L}\left(\frac{S_t}{S_0} | N_t = m\right) = \text{Log-Normale} \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + m \left( \mu_J - \frac{\sigma_J^2}{2} \right), \sigma^2 t + m \sigma_J^2 \right)$  et

$$\mathbb{E}[S_t | N_t = m] = S_0 e^{\mu t} e^{m \mu_J}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{\mu t} \mathbb{E}[e^{N_t \mu_J}] = S_0 e^{\mu t} e^{\lambda t (e^{\mu_J} - 1)}.$$

Ce qui signifie que le rendement moyen par unité de temps est  $\mu + \lambda(e^{\mu_J} - 1)$ .

On pose  $\mu^* = \mu - \lambda(e^{\mu_J} - 1)$  et on redéfinit notre modèle de la façon suivante :

$$S_t = S_0 e^{B_t^* + J_t}$$

avec  $B_t \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu^* - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$  et  $J_t = \sum_{i=0}^{N_t} X_i$  où  $X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu_J - \frac{\sigma_J^2}{2}, \sigma_J^2\right)$ . Alors

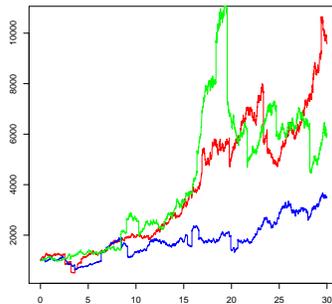
$$S_t \stackrel{\text{Loi}}{=} S_0 \exp \left( \left( \mu - \lambda(e^{\mu_J} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma\sqrt{t}Z + N_t \left( \mu_J - \frac{\sigma_J^2}{2} \right) + \sigma_J \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \right)$$

et  $\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{\mu t}$ .

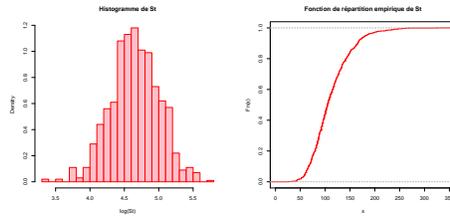
Connaitre la loi de  $S_t = S_0 e^{B_t^* + J_t}$  est très compliqué car en effet si on regarde sa fonction de répartition :

$$\mathbb{P}(S_t \leq K) = \mathbb{P}(B_t^* + J_t \leq \ln(K) - \ln(S_0))$$

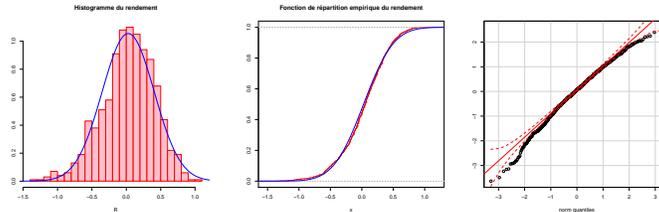
où  $B_t^* + J_t$  est la somme d'une variable normale et d'une variable de Poisson composé. Le plus simple est d'estimer la loi de  $S_t$  par simulation afin de calculer la fonction empirique de  $S_t$ .



Différentes trajectoires de  $S_t$  pour  $X_i$  gaussien.

Histogramme et fonction de répartition de  $S_t$ .

On peut de même simuler les rendements par unité de temps : en simulant plusieurs fois  $B_1^* + J_1$  on obtient l'histogramme des rendements.



Histogramme, fonction de répartition et QQ-plot du rendement par rapport à la loi normale.

### Autres modèles

On se considère encore le modèle

$$S_t = S_0 e^{B_t + J_t}$$

avec

$$— B_t \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right),$$

$$— J_t = \sum_{i=0}^{N_t} X_i \text{ et } N_t \text{ un processus de Poisson d'intensité } \lambda.$$

Les  $X_i$  peuvent n'importe quelle loi (Pareto, Gamma, NIG, etc...) et donc la loi de  $S_t$  est alors encore plus complexe.

Au lieu d'étudier  $B_t$  et  $J_t$  séparément, on va chercher un processus  $Z_t$  tel que

$$S_t = S_0 e^{Z_t}$$

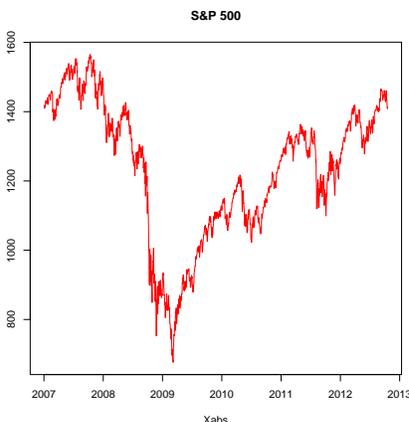
possède les bonnes propriétés pour un processus de prix, i.e.

1.  $(Z_t)_{t \geq 0}$  doit avoir des accroissements indépendants et stationnaires : pour  $s \leq t$ ,  $Z_t - Z_s$  indépendant de  $Z_s$  et de même loi que  $Z_{t-s}$  (hypothèse usuelle en finance mais pas forcément réaliste),
2. la loi de  $Z_t$  devrait avoir des ailes épaisses (pour modéliser les grandes amplitudes),
3. la loi de  $Z_t$  doit être connue afin de pouvoir estimer les paramètres.

De tels modèles existent.

Faisons d'abord une petite remarque : dans le modèle Log-Normal,  $S_t = S_0 e^{B_t}$  avec  $B_t \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$ , la volatilité et le rendement espéré par unité de temps sont constants au court du temps alors que lorsqu'on analyse des données du marché on observe que ce n'est pas le cas.

Si on regarde l'indice S&P 500, on voit bien qu'il y a des périodes à forte volatilité et des périodes à faible volatilité :



De même le rendement n'est en général pas constant.

**Cas particulier :** le modèle généralisé hyperbolique

On reparamétrise tout d'abord notre modèle :

$$S_t = S_0 e^{B_t}$$

avec  $B_t \sim \mathcal{N}((\mu + \beta\omega)t, \omega t)$ , où  $\omega$  est un paramètre aléatoire positif de loi  $F_\omega$ .

Étudions la loi de  $S_t$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_t \leq K) &= \int_0^\infty \underbrace{\mathbb{P}(S_t \leq K | \omega = x)}_{\text{Loi Log-Normale}((\mu + \beta x)t, xt)} f_\omega(x) dx \\ &= \int_0^\infty \Phi\left(\frac{\ln(K) - \ln(S_0) - (\mu + \beta x)t}{\sqrt{x t}}\right) f_\omega(x) dx \end{aligned}$$

L'expression reste très compliquée.

Dans le cas où  $\omega \sim GIG(\lambda, \delta t, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$ , alors on retrouve une loi hyperbolique généralisée :

$$\mathbb{P}(S_t \leq K) = F_{GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta t, \mu t)}(\ln(K) - \ln(S_0))$$

On peut facilement calculer cette quantité avec **R** en utilisant la fonction `pgh` du package *fBasics*.

Vérifions que ce modèle possède les bonnes propriétés. On considère donc

$$S_t = S_0 e^{Z_t} \text{ avec } Z_t \sim GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta t, \mu t).$$

Pour simuler  $S_t$  on peut soit utiliser la fonction `rgh` du package *fBasics*, soit faire le mélange d'une GIG (package *gamlss.dist*) et d'une loi Normale. L'inconvénient de la fonction `rgh` est que la paramétrisation de la densité d'une hyperbolique n'est pas spécifiée dans l'aide du package *fBasics*, il semble cependant que ce soit la même que celle utilisée dans le premier chapitre du cours.

Pour faire des simulations sous excel, voir les notes du cours de Manuel Morales.

## 4.2 Mesures de risque

On considère par exemple un actif dont l'évolution est stochastique :  $S_t$  peut-être le prix d'un actif boursier ou le surplus d'une compagnie d'assurance et on souhaite mesurer le risque lié à cet actif.

Il faut savoir que les niveaux minimaux pour faire face aux risques financiers et en assurance sont des fonctions des mesures de risque. La façon de les calculer est souvent imposée par les organismes régulateurs. Ce que l'on va voir dans la suite peut se généraliser à l'étude de plusieurs actifs  $(S_t^1, S_t^2, \dots, S_t^N)$ .

On se place sur une période  $[0, t]$  et on considère la "perte" entre l'instant  $t$  et l'instant initial :

$$X = S_0 - e^{-rt} S_t$$

où  $r$  est le facteur d'actualisation. Si  $X > 0$  on a eu une perte et si  $X < 0$  on a eu un gain. On souhaite mesurer le risque lié à l'actif considéré.

Dans la suite on ne prendra pas en compte le facteur d'actualisation pour ne pas alourdir les résultats, mais dans la réalité il faut le prendre en compte.

Attention : Dans certains livres, notamment dans *Derivatives Market*, les pertes sont définies comme

$$X = S_t - S_0.$$

Une première façon de mesurer le risque est de regarder la valeur moyenne de la perte  $\mathbb{E}[X]$ . Plus la valeur moyenne est grande, plus on est dans une situation risquée. Mais comme chacun sait on peut avoir une valeur moyenne faible et donc penser que la situation n'est pas risquée alors que la variance est très grande.

Par exemple, si  $X = \begin{cases} -12 \text{ M\$} & \text{avec probabilité } 0.5 \\ 10 \text{ M\$} & \text{avec probabilité } 0.5 \end{cases}$ , en moyenne la perte est de  $-1 \text{ M\$}$ . Si par contre la perte est constante égale à  $X = -1 \text{ M\$}$ , on a encore une perte moyenne de  $-1 \text{ M\$}$ . Dans le premier cas, on a une chance sur 2 de perdre  $10 \text{ M\$}$ , alors que dans le second cas on est toujours sur de gagner  $1 \text{ M\$}$ . Le second cas est de toute évidence moins risqué.

On pourrait par considérer la variance comme mesure de risque, mais seules les grandes valeurs de  $X$  sont inquiétantes (pas les faibles).

Enfin, pourquoi mesurer le risque? Essentiellement pour comparer deux actifs et pouvoir choisir le moins risqué. Dans l'idéal, une mesure de risque  $\mathcal{R}$  doit vérifier les propriétés suivantes :

- invariance en loi : si  $X \stackrel{\text{loi}}{=} Y$ , alors  $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(Y)$ ,
- croissance : si  $X \leq Y$  (i.e.,  $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$ ), alors  $\mathcal{R}(X) \leq \mathcal{R}(Y)$ ,
- respecte la translation : pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{R}(X + u) = \mathcal{R}(X) + u$ ,
- homogénéité : pour tout  $a \geq 0$ ,  $\mathcal{R}(aX) = a\mathcal{R}(X)$ ,
- sous-additivité :  $\mathcal{R}(X + Y) \leq \mathcal{R}(X) + \mathcal{R}(Y)$ ,
- convexité : pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\mathcal{R}(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \leq \alpha\mathcal{R}(X) + (1 - \alpha)\mathcal{R}(Y)$ .

En pratique, les mesures de risque utilisées ne vérifient que certaines de ces *bonnes* propriétés. L'homogénéité assure que le risque est invariant par changement de devise. La sous-additivité vient du fait qu'on espère que la diversification des investissements doit réduire le risque : le risque d'un portefeuille est moins important que le risque des actifs séparés. La convexité s'interprète de la même façon.

Une mesure de risque est dite **cohérente** si elle respecte la translation, est homogène, sous-additive et monotone.

Les mesures de risque portent sur des variables aléatoires, pas sur les processus. En effet, si on considère  $X = S_0 - S_t$ , seule la valeur à l'instant  $t$  de l'actif est prise en compte et non de toute la trajectoire sur l'intervalle  $[0, t]$ . On peut avoir un comportement très risqué entre les instants 0 et l'instant  $t$ , mais la mesure ne le prend pas en compte. C'est un des points faibles de ces mesures de risque lorsqu'on étudie des processus.

### 4.3 VaR : Value at Risk

La  $VaR$  est apparue (sous ce nom) dans les années 90, en réponse à de nombreux désastres qui ont touché les marchés de capitaux à cette période.

**Définition 4.3.1.**  $VaR$  est le quantile d'ordre  $\alpha$  de la loi des pertes  $F_X$ , i.e.

$$VaR^\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$$

et donc  $\mathbb{P}(X > VaR^\alpha) = 1 - \alpha$ .

On prend en général  $\alpha$  de l'ordre 95% ou 99%. C'est une fonction croissante de  $\alpha$ .

Dans le cas où la loi de  $X$  n'est pas continue, définir  $F_X^{-1}(\alpha)$  n'est pas forcément simple (la fonction  $F_X$  possède des sauts et des paliers). On définit alors

$$VaR^\alpha(X) = \min \{K : \mathbb{P}(X \leq K) \geq \alpha\}.$$

**Propriété 4.3.2.** La  $VaR$  respecte la translation, est homogène, mais malheureusement n'est pas sous-additive.

En effet : prenons

$$X = \begin{cases} 1000 & \text{avec proba } 0.04 \\ 0 & \text{avec proba } 0.96 \end{cases} \quad \text{et } Y \stackrel{\text{Loi}}{=} X \text{ indépendante de } X.$$

Les fonctions de répartition de  $X$  et  $X + Y$  sont donc

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1000 & \\ \hline F_X(x) & 0.96 & 1 & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1000 & 2000 \\ \hline F_{X+Y}(x) & 0.9216 & 0.9984 & 1 \end{array}$$

On a  $VaR^{0.95}(X) = VaR^{0.95}(Y) = 0$  et  $VaR^{0.95}(X + Y) = 1000 > VaR^{0.95}(X) + VaR^{0.95}(Y)$ .

#### 4.3.1 Utilisation en assurance

La grande différence entre la finance et l'assurance est qu'en assurance la loi des pertes est définie sur  $[0, +\infty)$  et représente des pertes associées à des réclamations. Il n'y a dans ce cas aucun gain contrairement aux produits financiers.

**Exemple 4.3.3.** Supposons que les pertes suivent une loi de Pareto :

$$f_X(x) = \frac{\gamma\theta^\gamma}{(x+\theta)^{\gamma+1}}.$$

Supposons que les paramètres valent  $\theta = 39.66$  et  $\gamma = 2.2$ . Alors

$$\mathbb{P}(X > VaR^\alpha) = \left( \frac{\theta}{VaR^\alpha + \theta} \right)^\gamma = 1 - \alpha$$

d'où  $VaR^{0.95} = 114.95$ .

**Exemple 4.3.4.** Regardons un exemple dans le cas discret. Les pertes mensuelles suivent la loi

$$\begin{array}{c|cccc} x & 0 & 10 & 50 & 100 \\ \hline \mathbb{P}(X = x) & 0.85 & 0.10 & 0.045 & 0.005 \end{array}$$

On a par conséquent

$$\begin{array}{c|cccc} x & 0 & 10 & 50 & 100 \\ \hline F_X(x) & 0.85 & 0.95 & 0.995 & 1 \end{array}$$

et par conséquent  $VaR^{0.95} = 10$ ,  $VaR^{0.99} = 50$ .

### 4.3.2 Utilisation en finance

La  $VaR^\alpha(X)$  vérifie

$$\mathbb{P}(X > VaR^\alpha) = 1 - \alpha.$$

Par conséquent, si se place dans le cadre d'actifs financiers et qu'on suppose les rendements sur chaque unité de temps indépendants, une perte supérieure à  $VaR^\alpha$  arrive selon la loi géométrique de paramètre  $1 - \alpha$ . Le temps moyen pour avoir une telle perte est donc  $1/(1 - \alpha)$ . Par exemple, si on prendre  $\alpha = 0.95$ , alors on observe une perte supérieure à  $VaR^{0.95}(X)$  en moyenne une fois sur 20.

Le modèle Log-Normal :

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}Z} \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_t < K) &= \mathbb{P}\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) < \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - (\mu - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, comme  $X = S_0 - S_t$ ,

$$VaR^\alpha(X) = S_0 - K^\alpha$$

avec  $\mathbb{P}(S_t < K^\alpha) = 1 - \alpha$ . On obtient la valeur de  $K^\alpha$  en inversant la fonction de répartition de  $S_t$  :

$$K^\alpha = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}\Phi^{-1}(1-\alpha)}.$$

**Exemple 4.3.5.** On place 3 M\$ dans une action avec un rendement moyen de 15% et de volatilité 30% par an. On suppose que le prix suit notre modèle Log-Normal. La valeur dans une semaine vaut

$$S_{1/52} = 3e^{(0.15 - (0.3)^2/2)\frac{1}{52} + 0.3\sqrt{\frac{1}{52}}Z} \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Par conséquent,

$$K^{0.95} = 3e^{(0.15 - (0.3)^2/2)\frac{1}{52} + 0.3\sqrt{\frac{1}{52}}\Phi^{-1}(0.05)}.$$

Comme  $\Phi^{-1}(0.05) = -1.645$ ,  $K^{0.95} = 2.8072$  et donc

$$VaR^{0.95} = S_0 - K^{0.95} = 0.1928 M.$$

ceci signifie qu'une perte de 0.1928 M\$ arrive en moyenne une semaine sur 20.

**Exemple 4.3.6.** Dans cet exemple on utilise le modèle *NIG* :

$$S_t = S_0 e^{Z_t} \text{ avec } Z_t \sim NIG(\alpha, \beta, \delta t, \mu t)$$

pour une action dont  $S_0 = 50$ . Les paramètres annualisés sont estimés à l'aide des rendements :

$$\alpha = 2, \beta = -1.5, \delta = 0.2, \mu = 0.2027$$

On souhaite calculer  $VaR^{0.9}$  sur un an :  $0.1 = \mathbb{P}(X > VaR^{0.9})$ . On obtient avec R,  $VaR^{0.9} = 31.4$ .

**Exemple 4.3.7.** Pour l'action Bayer, on peut modéliser les rendements journalier par une loi hyperbolique a été ajustée avec les paramètres :

$$\alpha = 139, \beta = 5.35, \delta = 0.0044, \mu = -0.003$$

On souhaite calculer  $VaR^{0.95}$  sur 30 jours avec  $S_0 = 100\$$  :  $0.05 = \mathbb{P}(X > VaR^{0.95})$ . On obtient avec R,  $VaR^{0.95} = 12.8$ .

## 4.4 Tail-Value (ou Conditional Tail Expectation)

La VaR est un montant d'argent que l'on peut perdre avec une certaine probabilité. On pourrait avoir exactement la même VaR dans deux modèles de pertes différents. Le but est de non seulement mesurer la probabilité des pertes mais aussi leurs magnitudes.

**Définition 4.4.1.** La Tail Value-at-Risk est définie comme la perte excessive espérée :

$$TVaR^\alpha(X) = \mathbb{E}[X|X > VaR^\alpha].$$

Il s'agit de la perte moyenne dans les pires  $1 - \alpha\%$  des cas.

Cette mesure de risque est parfois appelée  $CTE^\alpha$  : Conditional Tail Expectation.

(Il n'existe malheureusement pas de théorie uniformisant les définitions des mesures de risque).

On remarque que  $TVaR^\alpha(X)$  est une fonction croissante de  $\alpha$ .

**Remarque 4.4.2.** Dans certains livres, la Tail Value-at-Risk est définie comme la moyenne de VaR de niveau supérieur à  $\alpha$  :

$$TVaR^\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR^u(X) du$$

Si  $F_X$  est continue et comme  $F_X^{-1}(\alpha) = VaR^\alpha(X)$  et donc

$$\begin{aligned} TVaR^\alpha(X) &= \frac{1}{1 - \alpha} \int_{VaR^\alpha(X)}^{+\infty} v F_X'(v) dv \text{ en posant } v = F_X^{-1}(u) \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{X > VaR^\alpha(X)}] = \mathbb{E}[X|X > VaR^\alpha]. \end{aligned}$$

Par conséquent, dans le cas où la loi des pertes  $F_X$  est continue, les deux définitions coïncident.

**Proposition 4.4.3.** Quand  $F_X$  est continue, on a

$$TVaR^\alpha(X) = VaR^\alpha(X) + \frac{\mathbb{E}[X] - Lev_X(VaR^\alpha(X))}{1 - \alpha}.$$

*Démonstration.* On remarque que

$$\begin{aligned} TVaR^\alpha(X) &= \mathbb{E}[X|X > VaR^\alpha] \\ &= \mathbb{E}[X - VaR^\alpha(X) + VaR^\alpha(X)|X > VaR^\alpha] \\ &= mel_X(VaR^\alpha) + VaR^\alpha(X) \end{aligned}$$

où  $mel_X(u) = \mathbb{E}[X - u|X > u]$  est le mean excess loss.

Comme  $mel_X(u) = \frac{1}{1 - F(u)}(\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X \wedge u]) = \frac{1}{1 - F(u)}(\mathbb{E}[X] - Lev_X(u))$  où  $Lev_X(u)$  est la limited expected value, on a

$$TVaR^\alpha(X) = VaR^\alpha(X) + \frac{\mathbb{E}[X] - Lev_X(VaR^\alpha)}{1 - F(VaR^\alpha(X))}.$$

On conclut facilement car lorsque  $F_X$  est continue, on a  $F(VaR^\alpha(X)) = \alpha$ . □

**Propriété 4.4.4.**  $TVaR^\alpha$  respecte la translation, est homogène, sous-additive et monotone. C'est donc une mesure cohérente.

Il existe un lien entre la TVaR et la prime Stop-Loss (utile notamment pour les réassureurs) :

On dit que  $X \leq_{TVaR} Y$  si pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $TVaR^\alpha(X) \leq TVaR^\alpha(Y)$ . On a alors le résultat suivant :

$$X \leq_{TVaR} Y \iff \mathbb{E}[(X - t)_+] \leq \mathbb{E}[(Y - t)_+] \forall t \in \mathbb{R}.$$

#### 4.4.1 Utilisation en assurance

**Exemple 4.4.5.** Les pertes d'une compagnie d'assurance suivent la loi

$x$	0	100	1000
$\mathbb{P}(X = x)$	0.9	0.06	0.04

On a par conséquent

$x$	0	100	1000
$F_X(x)$	0.90	0.96	1

On en déduit que  $VaR^{0.90} = 0$ ,  $VaR^{0.95} = 100$ ,  $VaR^{0.96} = 100$ .

Calculons  $TVaR^{0.90}$  :

$$TVaR^{0.90} = \mathbb{E}[X|X > 0] = \frac{\mathbb{E}[X]}{P(X > 0)} = \frac{6 + 40}{0.1} = 460.$$

Pour  $\alpha = 0.95$  :

$$TVaR^{0.95} = \mathbb{E}[X|X > 100] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{X>100}]}{P(X > 100)} = \frac{40}{0.04} = 1000.$$

Pour  $\alpha = 0.96$ , on a encore

$$TVaR^{0.96} = \mathbb{E}[X|X > 100] = 1000.$$

En fait,  $TVaR^\alpha$  telle que définie est constante pour  $\alpha \in (0.9, 0.96]$ .

Comme la  $VaR^\alpha$ , le calcul de la  $TVaR^\alpha$  pose problème dans le cas discret. Pour éviter d'avoir une  $TVaR^\alpha$  constante par morceaux, on va l'approcher de façon linéaire de la façon suivante.

**Proposition 4.4.6.** Si la loi de  $X$  n'est pas continue, pour  $\alpha > 0$  fixé, on introduit

$$\alpha' = \max \left\{ \beta : VaR^\beta = VaR^\alpha \right\}$$

et on définit alors

$$TVaR^\alpha = \frac{(\alpha' - \alpha)VaR^\alpha + (1 - \alpha')\mathbb{E}[X|X > VaR^\alpha]}{1 - \alpha}.$$

Quand  $\alpha' = \alpha$ , on retrouve  $TVaR^\alpha = \mathbb{E}[X|X > VaR^\alpha]$ .

**Exemple 4.4.7.** Reprenons l'exemple précédent, on a pour  $\alpha = 0.96$ ,  $TVaR^{0.96} = 1000$  et pour  $\alpha = 0.95$ ,  $\alpha' = 0.96$ ,

$$TVaR^{0.95} = \frac{0.01 \times 100 + 0.04\mathbb{E}[X|X > 100]}{0.05} = 820.$$

**Exemple 4.4.8.** Supposons que les pertes suivent une loi de Pareto :

$$f_X(x) = \frac{\gamma\theta^\gamma}{(x + \theta)^{\gamma+1}}.$$

Comme

$$\mathbb{P}(X > VaR^\alpha) = \left( \frac{\theta}{VaR^\alpha + \theta} \right)^\gamma = 1 - \alpha$$

On en déduit que

$$VaR^\alpha = \theta \left( \frac{1}{(1-\alpha)^{1/\gamma}} - 1 \right).$$

Par ailleurs, en utilisant la formule

$$TVaR^\alpha(X) = VaR^\alpha + \frac{\mathbb{E}[X] - Lev_X(VaR^\alpha)}{1-\alpha}$$

et comme  $Lev_X(VaR^\alpha) = \frac{\theta}{\gamma-1} \left( 1 - \left( \frac{\theta}{\theta+x} \right)^{\gamma-1} \right)$ , on obtient

$$\begin{aligned} TVaR^\alpha(X) &= VaR^\alpha + \frac{1}{1-\alpha} \frac{\theta}{\gamma-1} \left( \frac{\theta}{\theta + VaR^\alpha} \right)^{\gamma-1} \\ &= VaR^\alpha + \frac{\theta + VaR^\alpha}{\gamma-1} \\ &= \frac{\gamma}{\gamma-1} VaR^\alpha + \frac{1}{\gamma-1} \theta. \end{aligned}$$

#### 4.4.2 Utilisation en finance

Le modèle Log-Normal sans saut :

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\sqrt{t}Z} \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Pour  $X = S_0 - S_t$ , on a

$$TVaR^\alpha(X) = \mathbb{E}[X | X > VaR^\alpha(X)] = S_0 - \mathbb{E}[S_t | S_t < S_0 - VaR^\alpha(X)]$$

Rappel :

$$\mathbb{E}[X | X < u] = \int_{-\infty}^u \frac{x f_X(x)}{F_X(u)} dx.$$

Dans notre cas,

$$\int_{-\infty}^u x f_{S_t}(x) dx = \int_{-\infty}^{\ln u} e^y f_{\bar{\mu}, \bar{\sigma}}(y) dy$$

avec  $f_{\bar{\mu}, \bar{\sigma}}(y)$  densité de la loi  $\mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$  avec  $\bar{\mu} = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)t + \ln(S_0)$  et  $\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 t$ . On a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^a e^y f_{\bar{\mu}, \bar{\sigma}}(y) dy &= \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}}} e^{-\frac{(y-\bar{\mu})^2 - 2\bar{\sigma}^2 y}{2\bar{\sigma}^2}} dy \\ &= \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}}} e^{-\frac{(y-\bar{\mu}-\bar{\sigma}^2)^2}{2\bar{\sigma}^2}} e^{\bar{\mu} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}} dy \\ &= e^{\bar{\mu} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}} \Phi \left( \frac{a - \bar{\mu} - \bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}} \right) \end{aligned}$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^u x f_{S_t}(x) dx = e^{\bar{\mu} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}} \Phi \left( \frac{\ln(u) - \bar{\mu} - \bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}} \right).$$

Par ailleurs

$$F_{S_t}(u) = \mathbb{P}(S_t \leq u) = \Phi\left(\frac{\ln(u) - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}}\right)$$

On en déduit que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t | S_t < u] &= \frac{1}{\Phi\left(\frac{\ln(u) - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}}\right)} e^{\bar{\mu} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}} \Phi\left(\frac{\ln(u) - \bar{\mu} - \bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}}\right) \\ &= S_0 e^{\mu t} \frac{\Phi\left(\frac{\ln(u/S_0) - (\mu + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}\right)}{\Phi\left(\frac{\ln(u/S_0) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}\right)} \end{aligned}$$

En notant  $d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{S_0 - VaR^\alpha} + (\mu + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$  et  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$ , on a donc

$$TVaR^\alpha = S_0 - S_0 e^{\mu t} \frac{\Phi(-d_1)}{\Phi(-d_2)}$$

**Remarque 4.4.9.** Les constantes  $d_1$  et  $d_2$  apparaissent souvent en finance, notamment en valuation d'option (Black-Scholes).

**Exemple 4.4.10.** Le prix d'aujourd'hui d'une action est  $S_0 = 100\$$ , la volatilité est de 30% et le rendement de 15% par unité de temps. Sur un horizon de  $t = 0.5$ , calculer  $VaR^\alpha$  et  $TVaR^\alpha$  pour  $\alpha = 0.95$ . Calculons  $VaR^\alpha$  en premier. On a

$$VaR^\alpha = S_0 - S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}\Phi^{-1}(1-\alpha)}.$$

Comme  $\Phi^{-1}(0.005) = -1.645$ , on obtient

$$VaR^\alpha = 100 \left( 1 - e^{(0.15 - 0.3^2/2)/2 - 0.3 \times 1.645/\sqrt{2}} \right) = 25.65$$

Par conséquent,

$$TVaR^\alpha = 100 \left( 1 - e^{0.15 \times 0.5} \frac{\Phi(-d_1)}{\Phi(-d_2)} \right)$$

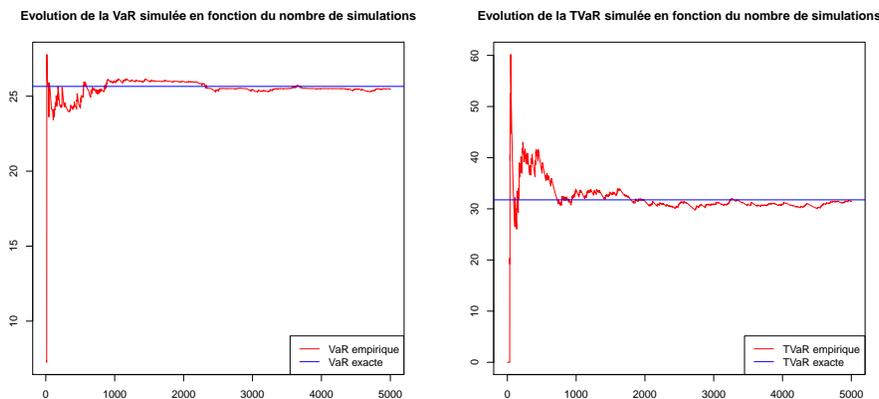
avec  $d_1 = 1.857$  et  $d_2 = 1.645$  et donc

$$TVaR^\alpha = 100 \left( 1 - e^{0.15 \times 0.5} \frac{0.03166}{0.05} \right) = 31.75$$

Pour des modèles plus compliqués que le modèle LogNormal, on estime  $TVaR^\alpha$  par simulation :

$$TVaR^\alpha = \mathbb{E}[S_0 - S_t | S_0 - S_t > VaR^\alpha] \simeq \frac{1}{n(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n (S_0 - S_t^i) \mathbb{1}_{S_0 - S_t^i > VaR^\alpha}$$

car  $\mathbb{P}(S_0 - S_t > VaR^\alpha) = 1 - \alpha$ .



Comparaison de la valeur simulée et de la valeur exacte de la  $VaR$  et de la  $TVaR$  pour le modèle LogNormal en fonction du nombre de simulation.

## 4.5 Mesures par distorsion

En assurance, les pertes sont toujours positives et on a

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} S_X(x) dx \text{ où } S_X(x) = 1 - F_X(x) \text{ est la fonction de survie.}$$

On sait que la moyenne ne permet pas de mesurer le risque façon optimale, par contre on peut définir une nouvelle mesure de risque modifiant l'espérance :

**Définition 4.5.1.** Une mesure  $\rho$  par distorsion (ou mesure de Wang) est définie par

$$\rho(X) = \int_0^{\infty} g(S_X(x)) dx \text{ où } S_X(x) = 1 - F_X(x) \text{ est la fonction de survie}$$

avec  $g$  fonction croissante telle que  $g(0) = 0$  et  $g(1) = 1$ .

Les mesures par distorsion sont homogènes, monotones et respectent la translation. On peut montrer que si  $g$  est concave, alors la mesure  $\rho$  est sous-additive.

**Remarque 4.5.2.** On remarque que  $g(S_X(x))$  est une fonction de survie et donc si  $Y$  est une v.a. de fonction de survie  $g(S_X(x))$ , on a  $\rho(X) = \mathbb{E}[Y]$ .

Attention :  $Y \neq g(X)$  ! C'est malheureusement plus compliqué.

On remarque  $VaR^\alpha$  et  $TVaR^\alpha$  sont des mesures de distorsion. En effet

$$\text{— Soit } g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 - \alpha \\ 1 & \text{si } x > 1 - \alpha \end{cases}, \text{ alors}$$

$$\rho(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{S_X(x) > 1 - \alpha} dx = \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{x \leq VaR^\alpha(X)} dx = VaR^\alpha(X).$$

— Soit  $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\alpha} & \text{si } x \leq 1-\alpha \\ 1 & \text{si } x > 1-\alpha \end{cases}$ , alors

$$\begin{aligned} \rho(X) &= \int_0^\infty \frac{x}{1-\alpha} \mathbb{1}_{S_X(x) \leq 1-\alpha} dx + \int_0^\infty \mathbb{1}_{S_X(x) > 1-\alpha} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{S_X(x)}{1-\alpha} \mathbb{1}_{x \geq VaR^\alpha(X)} dx + \int_0^\infty \mathbb{1}_{x < VaR^\alpha(X)} dx \\ &= \int_{VaR^\alpha(X)}^\infty \frac{S_X(x)}{1-\alpha} dx + VaR^\alpha(X) \\ &= \mathbb{E}[X - VaR^\alpha(X) | X > VaR^\alpha(X)] + VaR^\alpha(X) = TVaR^\alpha(X). \end{aligned}$$

Autre exemple : mesure de risque à hasard proportionnel  $g(x) = x^\alpha$  avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Si  $X$  suit la loi de pareto

$$S_X(x) = \left( \frac{\theta}{x+\theta} \right)^\gamma \text{ alors } g(S_X(x)) = \left( \frac{\theta}{x+\theta} \right)^{\alpha\gamma}$$

et donc

$$\rho_{HP}(X) = \int_0^\infty \left( \frac{\theta}{x+\theta} \right)^{\alpha\gamma} dx = \frac{\theta}{\alpha\gamma - 1} \text{ si } \alpha\gamma > 1.$$

On parle de mesure de Gini si  $g(x) = (1+\alpha)x - \alpha x^2$ , de Transformation Exponentielle si  $g(x) = (1-\alpha^x)/(1-\alpha)$ , de Dual Power si  $g(x) = 1 - (1-x)^{1/\alpha}$ , ...