Cours de processus en temps continu

1ère Partie.

Table des matières

1 Construction du Mouvement Brownien 5

1 Un peu d'histoire (voir [7] et [1]) 5
2 Rappels sur les variables gaussiennes 6
3 Le mouvement brownien 7
4 Construction du mouvement brownien 7
4.1 Principe d'invariance de Donsker(voir [5] et [1]) 7
4.2 Construction de Paul Lévy 8
4.3 Autre construction 9
5 Régularité des trajectoires 10
6 La mesure de Wiener 13

2 Le mouvement Brownien en tant que processus de Markov 17

1 Premières propriétés du mouvement brownien 17
1.1 Propriéte de Markov simple 17
1.2 Semi-groupe associé au mouvement brownien 19
2 Propriété de Markov forte et applications 20
2.1 Notion de temps d'arrêt 20
2.2 Propriété de Markov forte 22
2.3 Application : principe de réflexion 23

3 Processus et martingales en temps continu 27

1 Quelques rappels sur les martingales en temps discret (voir [4]) 27
1.1 Martingales et temps d'arrêt 28
1.2 Inégalités importantes 28
1.3 Théorèmes de convergence 30
2 Processus en temps continu 31
3 Martingales en temps continu 32
3.1 Definition et exemples 33
3.2 Premières propriétés 33
3.3 Convergence des martingales continues 35
3.4 Théorème d'arrêt 36
4 Processus de Poisson 36

4 Semimartingales et calcul stochastique 39

1 Processus à variation bornée 39
1.1 Notion de variation bornée dans le cadre déterministe, mesure de Stieljes 39
1.2 Notion de variation bornée dans le cadre aléatoire 41
2 Martingales locales et leur crochet 42
3 Intégrale stochastique 48
3.1 Intégration par rapport au martingales continues bornées dans L^2 48
3.2 Extension aux semimartingales continues 53
4 Que se passe t'il dans le cas càdlàg ? 56

Chapitre 1

Construction du Mouvement Brownien

1 Un peu d'histoire (voir [7] et [1])

Le nom de mouvement Brownien vient du botaniste Robert Brown. Brown n'a pas découvert le mouvement brownien, car n'importe qui regarde dans un miscroscope peut voir le mouvement rapide et irrégulier des particules de pollen en suspension dans de l'eau. Cependant, avant lui on pensait que les particules étaient vivantes. Une autre théorie expliquait que le mouvement des particules étaient dû à la différence de température entre l'eau et le milieu ambiant provoquant l'évaporation de l'eau, ainsi qu'aux courants d'air. Brown (1828) réfuta ces théories et établit que les particules étaient inanimées. Il expliqua que la matière était composée de petites particules, appelées molécules actives, qui montrent un mouvement rapide et irrégulier, dont l'origine vient des particules. Puis au début des années 1900, le mouvement brownien fut caractérisé de la façon suivante :

- Le mouvement est très irrégulier, composé de translations et de rotations, la trajtoire ne semble pas avoir de tangentes.
- Deux particules semblent bouger de façon indépendantes, même si elles sont très proches.
- Le mouvement est d'autant plus actif que les particules sont petites.
- La composition et la densité des particules n'ont pas d'influence.
- Le mouvement est d'autant plus actif que le fluide n'est pas trop visqueux.
- Le mouvement est plus actif en température haute.
- Le mouvement est sans fin.

En 1905, la théorie cinétique, expliquant que le mouvement brownien des particules microscopiques est dû au bombardements des molécules du fluide, semble la plus plausible.
La mise en évidence du mouvement brownien comme processus stochastique est dû indépendamment au mathématicien français Louis Bachelier (1900) et Albert Einstein en (1905). Bachelier dans sa thèse *Théorie de la spéculation* avait pour but la modélisation de la dynamique des actifs boursiers et son application au calcul de prix d'option. Il obtient la loi du mouvement brownien à un instant donné. Il met surtout en évidence le caractère markovien du mouvement brownien : le déplacement d'une particule brownienne après un instant t de dépend que de l'endroit où elle était à l'instant t et mais pas de comment elle est arrivée à ce point. Par ailleurs, Einstein, qui ignorait l'existence de ce débat, formula une théorie quantitative en 1905 du mouvement brownien. Einstein réussi à expliquer la nature du mouvement et donna la valeur du coefficient de diffusion (sous certaines hypothèses). La méthode d'Einstein repose sur des considérations de mécanique statistique qui le conduit à l'équation de la chaleur puis à la densité gaussienne,

solution fondamentale de cette équation.
L'existence du mouvement brownien en tant que processus stochastique a été établie de façon rigoureuse par Wiener en 1923. Paul Lévy magnifiera cet objet en entamant une étude fine du comportement de ses trajectoires jusque dans les années 1930-1960. En 1944, Itô construit l'intégrale stochastique et développa le calcul stochastique.

2 Rappels sur les variables gaussiennes

Considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit un loi $\mathcal{N}(0,1)$ si $\mathbb{P}(N \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.
Estimation de la queue gaussienne : pour $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N \geq x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} t e^{-t^2/2} dt \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

Transformation de Laplace-Fourier : pour $z \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{E}[e^{zN}] = \exp(z^2/2).$$

Pour $m \in \mathbb{R}$ and $\sigma > 0$, $N' = m + \sigma N$ suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma)$, de densité $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ et de tranformée de Fourier $\mathbb{E}[e^{zN'}] = \exp(zm + \sigma^2 z^2/2)$.

Remarque 2.1
1. Si X et X' sont des variables indépendantes de loi respectives $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m', \sigma'^2)$, alors $X + X'$ suit la loi $\mathcal{N}(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2)$.
2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables gaussiennes, $X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi ssi $m_n \to m \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n^2 \to \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$, et alors la loi limite est $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Preuve. Il suffit d'utiliser les fonctions caractéristiques.

$\triangle$

Vecteurs gaussiens :
Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 1$. X est dit *gaussien* si toute combinaison linéaire de ses composantes est une v.a. gaussienne :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^d \quad < \lambda, X >= \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_d X_d \quad \text{suit une loi gaussienne.}$$

La loi d'un vecteur aléatoire gaussien X est entièrement déterminé par son vecteur espérance $m = E(X) \in \mathbb{R}^d$ et sa matrice de covariance $\Gamma = \mathbb{E}[(X-m).(X-m)^t]$. On note $X \stackrel{Loi}{=} \mathcal{N}(m, \Gamma)$. La matrice Γ est symétrique semi-définie positive (pas forcément inversible). On a

$$\Gamma_{ij} = cov(X_i, X_j) = \mathbb{E}\left[(X_i - \mathbb{E}(X_i))\,(X_j - \mathbb{E}(X_j)) \right].$$

Sa fonction caractéristique est

$$\mathbb{E}[\exp(i < u, X >)] = \exp\left(i < u, m > - \frac{1}{2} u^t.\Gamma.u \right)$$

Par ailleurs, X admet une densité f_X par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ ssi Γ est inversible. La densité s'écrit alors

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det \Gamma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^t.\Gamma^{-1}.(x-m) \right).$$

Soit X un vecteur gaussien, Ses coordonnées sont indépendantes ssi la matrice covariance est diagonale ($\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$ pour $i \neq j$.)

3 Le mouvement brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Un processus stochastique est une famille indexée par le temps $(X_t)_{t\in[0,+\infty)}$ de variables aléatoires définies sur l'espace Ω.

Définition 3.1 Un processus X est dit *stationnaires*, si $\forall t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ et $s \geq 0$, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \overset{Loi}{=} (X_{t_1+s}, \ldots, X_{t_n+s})$.
Un processus X est dit *à accroissement indépendants*, si $\forall t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendants.
Un processus X est dit *gaussien*, si $\forall t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.
Un processus X est dit *continu* (ou *p.s. continu*) si la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue pour tout $\omega \in \Omega$ fixé (ou $\omega \in \Omega'$ avec $\Omega' \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(\Omega') = 1$).
Les *lois finis dimensionnelles* d'un processus X est l'ensemble des lois conjointes $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$, pour tout $n \geq 1$ et $\forall t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$.

Définition 3.2 Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ une famille de v.a. indéxée par le temps. On dit que B est un *mouvement brownien* si c'est un processus continu tel que

i) $\forall t \geq 0$, $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$,

ii) si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, les v.a. $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

Par conséquent, $B_0 = 0$.

Remarque 3.3 cherchons la loi d'un accroissement $B_{t+s} - B_t$, pour $t, s \geq 0$:
On remarque que $B_{t+s} = B_t + B_{t+s} - B_t$, avec $B_{t+s} \sim \mathcal{N}(0, t+s)$ et $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, donc par indépendance, en calculant la fonction caractéristique de $B_{t+s} - B_t$, on obtient

$$B_{t+s} - B_t \overset{Loi}{=} B_s \text{ et } B_{t+s} - B_t \text{ est indépendant de } B_t.$$

Le mouvement brownien a des accroissements indépendants et stationnaires. De plus, comme les accroissements sont gaussiens, B est un *processus gaussien*.

<u>Covariance du brownien :</u>
Si $s \leq t$, $\mathbb{E}[B_t B_s] = \mathbb{E}[(B_s + (B_t - B_s))B_s] = s + 0$. De même, si $t \leq s$, $\mathbb{E}[B_t B_s] = t$. Donc

$$\mathbb{E}[B_t B_s] = t \wedge s.$$

Définition 3.4 (équivalente)
Un mouvement brownien est un processus continu gaussien centré indexé par $[0, +\infty[$ de covariance $t \wedge s$.

4 Construction du mouvement brownien

4.1 Principe d'invariance de Donsker(voir [5] et [1])

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d centrée et de variance égale à 1.
D'après le T.L.C., en posant $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, on a

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} \mathcal{N}(0, 1).$$

En notant $[x]$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$, pour $t \in \mathbb{R}^+$, pour n assez grand on a

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \simeq \sqrt{t}\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{[nt]}} \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} \mathcal{N}(0, t).$$

On remarque que $S_{[n(t+s)]} - S_{[nt]} = X_{[nt]+1} + \ldots + X_{[n(t+s)]}$, alors que $S_{[nu]}$, pour $u \leq t$, ne dépend que $X_1, \ldots, X_{[nt]}$, par conséquent il y a indépendance des accroissements.

La suite de processus $\left(\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} - \left(\frac{nt-[nt]}{\sqrt{n}} \right) X_{[nt]+1}, t \geq 0 \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le mouvement brownien.... mais à l'heure actuelle, nous n'avons pas les outils pour le prouver (on a besoin d'étudier la tension de la suite + convergence des lois fini-dimensionnelles).

4.2 Construction de Paul Lévy

L'idée est de construire le mouvement brownien B sur l'intervalle de temps $[0,1]$ par approximation en utilisant les fonctions de Schauder $f_{k,n}$:

$f_{k,n}$ est une fonction triangle sur $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ telle que $f(k2^{-n} + 2^{-n-1}) = 2^{-(n+2)/2}$.

Considérons $N_{-1}, N_{0,0}, N_{1,0}, \ldots, N_{k,n}, \ldots$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $k = 0, \ldots, 2^n - 1$, des variables gaussiennes $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes.
Pour $t \in [0,1]$, on définit $B_t^{-1} = tN_{-1}$ et

$$B_t^n = tN_{-1} + \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{2^l-1} N_{k,l} f_{k,l}(t).$$

On montre que p.s. la suite B^n converge uniformément en temps sur $[0,1]$ vers un mouvement brownien B. De plus, B est alors p.s. continu comme limite uniforme de fonctions continues.
Preuve.

i) Convergence uniforme

On a

$$B_t^n = B_t^{n-1} + \sum_{k=0}^{2^n-1} N_{k,n} f_{k,n}(t).$$

Comme les fonctions $f_{k,n}$ à n fixé sont disjointes, on remarque alors que

$$\sup_{t \in [0,1]} |B_t^n - B_t^{n-1}| = \sup_{k=0,\ldots,2^n-1} |N_{k,n}| 2^{-(n+2)/2}$$

Les variables $N_{k,n} 2^{-(n+2)/2}$ ont toutes la même loi, et en majorant par la somme des probas, en introduisant $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} |B_t^n - B_t^{n-1}| > \frac{1}{n^2}\right) &\leq 2^n \, \mathbb{P}\left(|N| > \frac{2^{(n+2)/2}}{n^2}\right) \\ &\leq \frac{2^n}{\sqrt{2\pi}} e^{-2^{n+2}/2n^4} \end{aligned}$$

Par conséquent la série $\sum \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} |B_t^n - B_t^{n-1}| > 1/n^2)$ est convergente, donc par Borel Cantelli, p.s. pour n assez grand

$$\sup_{t \in [0,1]} |B_t^n - B_t^{n-1}| \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série de terme général $B^n - B^{n-1}$ converge uniformément, donc la suite B^n converge uniformément sur $[0,1]$. On note B sa limite, qui est continue comme limite uniforme de fonctions continues.

ii) Indépendance des accroissements + caractère gaussien.

Par récurrence, on montre (HR_n) :

$$(HR_n) \quad := \quad \text{Les accroissements de } B^{n-1} \text{ sur la partitions } 0, 2^{-n}, \ldots, k2^{-n}, \ldots$$
$$\text{sont indépendants et suivent tous la même loi } \mathcal{N}(0, 2^{-n}).$$

Pour $n = 0$, c'est évident. Pour $n = 1$: vérifions que la propriété est vraie.

$$B_0^0 = 0,\ B_{1/2}^0 = \frac{N_{-1} + N_{0,0}}{2},\ B_1^0 = N_{-1}$$

N_{-1} et $N_{0,0}$ sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Par conséquent $(\frac{N_{-1}+N_{0,0}}{2}, \frac{N_{-1}-N_{0,0}}{2})$ est un vecteur gaussien dont les marginales suivent la loi $\mathcal{N}(0, 1/2)$. De plus,

$$\mathbb{E}\Big[\frac{N_{-1} + N_{0,0}}{2} . \frac{N_{-1} - N_{0,0}}{2}\Big] = \frac{1}{4} . \mathbb{E}[N_{-1}^2 - N_{0,0}^2] = 0$$

Les accroissements sont bien indépendants.

Supposons (HR_n) vraie, étudions (HR_{n+1}).
Comme

$$B_t^n = B_t^{n-1} + \sum_{k=0}^{2^n-1} N_{k,n} f_{k,n}(t).$$

En utilisant (HR_n) et le fait que les v.a. $(N_{k,n})_k$ sont indépendantes de B^{n-1}, du fait que les fonction $f_{k,n}$ sont à supports disjoints, il suffit de vérifier que la propriété est vraie pour deux accroissements consécutifs dépendant de la même variable $N_{k,n}$, i.e.

$$X = B^n_{(2k+1)2^{-n-1}} - B^n_{2k2^{-n-1}} \qquad \text{et} \qquad Y = B^n_{(2k+2)2^{-n-1}} - B^n_{(2k+1)2^{-n-1}}$$

sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 2^{-n-1})$. Par construction, B^{n-1} est linéaire sur $[2k2^{-n-1}, (2k+2)2^{-n-1}]$, on remarque donc que $X = Z/2 + Z'$ et $Y = Z/2 - Z'$ où Z est l'accroissement de B^{n-1} : $Z = B^{n-1}_{(2k+2)2^{-n-1}} - B^{n-1}_{2k2^{-n-1}}$ et $Z' = 2^{-(n+2)/2} N_{k,n}$.
Par (HR_n), on sait que $Z \sim \mathcal{N}(0, 2^{-n})$, d'où $Z/2 \sim \mathcal{N}(0, 2^{-n-2})$. Par ailleurs $Z' \sim \mathcal{N}(0, 2^{-n-2})$ et est indépendante de Z. Donc $X \overset{Loi}{=} Y$ de loi $\mathcal{N}(0, 2^{-n-1})$, et leur covariance vaut

$$\mathbb{E}[(Z/2 + Z')(Z/2 - Z')] = \mathbb{E}[Z^2/4 - Z'^2] = 2^{-n}/4 - 2^{-n-2} = 0.$$

D'où le résultat.

iii) Conclusion

On en déduit immédiatement par passage à la limite que le processus B a des accroissements indépendants sur les intervalles dyadiques et $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ pour tout t dyadique (car la convergence p.s. implique la convergence en loi). Comme B a des trajectoires continues, du fait que les dyadiques sont denses dans $[0, 1]$, par passage à la limite les résultats restent vrais sur $[0, 1]$. $\triangle$

4.3 Autre construction

Cette construction est basée sur les séries de Fourier. (cf, exo Revuz-Yor, chap 1). On considère des variables N_k, $N_{k'}$ indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors

$$\beta_t = tN_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2\pi k} (N_k \cos(2\pi kt - 1) + N'_k \sin(2\pi kt))$$

est un mouvement brownien. Pour cela on vérifie tout d'abord que les coefficients sont gaussiens et indépendants.

5 Régularité des trajectoires

Définition 5.1 Soit $X = (X_t, t \geq 0)$ un processus aléatoire. On dit que X admet une *version*, ou encore une *modification*, s'il existe un processus $\tilde{X} = (\tilde{X}_t, t \geq 0)$ tel que

$$\forall t \text{ fixé, } X_t = \tilde{X}_t \text{ p.s.}$$

On parle de *version continue*, ou *modification continue*, si la modification $\tilde{X}$ est p.s. continue.

Attention : on n'a pas en général $(X_t, t \geq 0) = (\tilde{X}_t, t \geq 0)$ p.s. ($[0, +\infty[$ n'est pas dénombrable !). Choisir une version (ou modification) d'un processus peut changer de façon importante le processus.

Exemple 5.2 Sur $(\Omega = [0,1], \mathcal{B}([0,1]), d\lambda)$ on considère le processus sur $[0,1]$

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq \omega \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors le processus $\tilde{X}_t = 0$, $\forall t \geq 0$ est une version de X. En effet $\forall t$ fixé, $X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)$ sauf pour $\omega = t$. Par contre

$$\mathbb{P}(\forall t, X_t = \tilde{X}_t) = \mathbb{P}(\{\omega \in [0,1] : \forall t, X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in [0,1] : \forall t \in [0,1]\ \omega \neq t\}) = 0.$$

Remarque 5.3 Cependant dans le cas de processus continus on a : si X est un processus continu et $\tilde{X}$ une modification continue, alors p.s. $X = \tilde{X}$.

Le résultat de base sur l'existence de versions régulières de processus stochastique est le critère suivant :

Théorème 5.4 *Critère de Kolmogorov-Čentsov (1956)*
Soit $X = (X_t, t \in [0,1])$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (ou plus généralement un espace métrique complet) tel qu'il existe $c > 0$

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^p] \leq c|t-s|^{1+\varepsilon} \quad \text{pour } p > 1 \text{ et } \varepsilon > 0. \tag{5.1}$$

Alors il existe une version $\tilde{X}$ de X qui est p.s. localement höldérienne d'exposant α, pour tout $\alpha \in (0, \varepsilon/p)$.

Cas du mouvement brownien
Soit N une v.a. $\mathcal{N}(0,1)$ et $t \leq s$. On a pour $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^p] = \mathbb{E}[|\sqrt{t-s}N|^p] = |t-s|^{p/2}\mathbb{E}[|N|^p]$$

En notant $C = \mathbb{E}[|N|^p]$, le critère de kolmogorov s'applique pour $p > 2$, et donc les trajectoires browniennes sont *p.s.* localement hölderiennes d'exposant α, avec $\alpha < \frac{p/2-1}{p}$. On peut choisir p aussi grand que l'on veut, donc les trajectoires browniennes sont *p.s.* localement höldériennes d'exposant α, avec $\alpha \in (0, 1/2)$

Preuve du Critère de Kolmogorov-Čentsov.
La preuve est basée sur le lemme de Borel-Cantelli.
Pour simplifier, on suppose $c = 1$ (quitte à diviser X par la bonne constante). On fixe $\alpha < \varepsilon/p$. Soit $D = \cup_n D_n$ l'ensemble des dyadiques, avec $D_n = \{k2^{-n}, k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. On a $D_n \subset D_{n+1}$ et D est dense dans $[0,1]$.

i) Pour t, s dyadiques.

• Soit $t, s \in D_n$ avec $t = (k+1)2^{-n}$ et $s = k2^{-n}$. D'après l'inégalité de Markov, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_{(k+1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}}| > 2^{-n\alpha}) &\leq \frac{\mathbb{E}[|X_{(k+1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}}|^p]}{2^{-np\alpha}} \\ &\leq 2^{-n(1+\varepsilon)+np\alpha} \end{aligned}$$

Comme $p\alpha < \varepsilon$,

$$\mathbb{P}(\exists k \in \{0, \ldots, 2^{-n} - 1\} : |X_{(k+1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}}| > 2^{-n\alpha}) \leq 2^n 2^{-n(1+\varepsilon)+np\alpha} = 2^{-n\varepsilon+np\alpha}$$

est le terme général d'une série convergente. D'après Borel-Cantelli, avec proba 1 pour n assez grand, on a

$$|X_{(k+1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}}| \leq 2^{-n\alpha} = |t-s|^\alpha \quad \forall k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1.$$

• Montrons maintenant que la restriction X à l'ensemble des dyadiques D est α-höldérienne. Soient $t, s \in D$, il existe alors $n \geq 0$ tel que $2^{-n-1} < |t-s| \leq 2^{-n}$. Par ailleurs, il existe $m \geq 1$ tel que $t, s \in D_{n+m}$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} t &= k2^{-n} + \varepsilon_0 2^{-n} + \varepsilon_1 2^{-n-1} + \ldots + \varepsilon_m 2^{-n-m} \\ s &= k2^{-n} + \varepsilon'_0 2^{-n} + \varepsilon'_1 2^{-n-1} + \ldots + \varepsilon'_m 2^{-n-m} \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m, \varepsilon'_0, \ldots, \varepsilon'_m = 0$ ou 1. On note pour $i = 0, \ldots, m$

$$\begin{aligned} t_i &= k2^{-n} + \varepsilon_0 2^{-n} + \varepsilon_1 2^{-n-1} + \ldots + \varepsilon_i 2^{-n-i}, \\ s_i &= k2^{-n} + \varepsilon'_0 2^{-n} + \varepsilon'_1 2^{-n-1} + \ldots + \varepsilon'_i 2^{-n-i}. \end{aligned}$$

Alors $t = t_m$, $s = s_m$ et

$$\begin{aligned} |X_t - X_s| &\leq |X_{t_0} - X_{s_0}| + |X_{t_0} - X_{t_1}| + \ldots + |X_{t_{m-1}} - X_{t_m}| + \\ &\quad |X_{s_0} - X_{s_1}| + \ldots + |X_{s_{m-1}} - X_{s_m}| \\ &\leq (2^{-\alpha n} + 2^{-(n+1)\alpha} + \ldots + 2^{-(n+m)\alpha}) \times 2 \text{ p.s. pour } n \text{ assez grand.} \\ &\leq 2^{-\alpha n} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{1 - 2^{-\alpha}} |t-s|^\alpha \end{aligned}$$

Donc p.s. il existe $c > 0$ tel que $\forall t, s \in D$ $|X_t - X_s| \leq c|t-s|^\alpha$ pour $|t-s| \leq 2^{-n}$ avec n assez grand. Soit $\Omega' \subset \Omega$, $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ sur lequel cet événement se produit.

ii) Construction de la version Hölderienne.

On construit, pour $t \geq 0$, $\tilde{X}_t = \lim_{t' \in D, t' \to t} X_{t'}$ sur Ω'. Les trajectoires de $\tilde{X}$ sont localement α-hölderiennes.
Vérifions que $\tilde{X}$ est une version de X.
On a $\tilde{X}_t = X_t$ dès que $t \in D$. Par ailleurs, d'après (5.1), $X_{t'}$ converge vers X_t dans L^p quand $t' \in D, t' \to t$. Donc $\forall t > 0$ $\tilde{X}_t = X_t$ p.s.. $\tilde{X}$ est bien une version de X. △

On va voir maintenant que le résultat de régularité höldérienne d'ordre $\alpha < 1/2$ pour les trajectoires brownienne est optimal.

Théorème 5.5 *(Dvoretsky, 1963)*
Il existe une constant $C > 0$ telle que

$$\mathbb{P}(\exists t > 0 : \limsup_{s \to t^+} \frac{|B_s - B_t|}{\sqrt{s-t}} < C) = 0$$

Par conséquent, p.s. $\forall t \in [0,1]$, $\limsup_{s \to t^+} \frac{|B_s - B_t|}{\sqrt{s-t}} \geq C$. En particulier, les trajectoires browniennes sont nulle part dérivables avec proba 1.

Preuve. (On choisira la constante C à la fin)
Il suffit de vérifier que pour chaque $\Delta > 0$, on a

$$\mathbb{P}(\exists t > 0 : |B_{t+h} - B_t| < C\sqrt{h} \ \ \forall h \in [0, \Delta]) = 0$$

On remarque que pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\exists t > 0 : |B_{t+h} - B_t| < C\sqrt{h} \ \ \forall h \in [0, \Delta]) &\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\exists t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] : |B_{t+h} - B_t| < C\sqrt{h} \ \ \forall h \in [0, \Delta]) \\
&\leq n \ \mathbb{P}(\exists t \in [0, \frac{1}{n}] : |B_{t+h} - B_t| < C\sqrt{h} \ \ \forall h \in [0, \Delta]) \\
&\quad \text{par stationnarité des accroissements.}
\end{aligned}$$

On connait la loi de $B_{t+h} - B_t$, mais on ne peut pas calculer directement cette probabilité à cause des termes $\exists t \in [0, \frac{1}{n}]$ et $\forall h \in [0, \Delta]$ (intervalle non dénombrable !).
Soit n tel que $1/n < \Delta$, et $(h_j)_{j=0,\ldots,N}$ une famille (que l'on déterminera plus tard) croissante, telle que $h_j \in [1/n, \Delta]$ pour tout j. On remarque que si $\exists t \in [0, \frac{1}{n}] : |B_{t+h} - B_t| < C\sqrt{h} \ \ \forall h \in [0, \Delta]$, alors pour tout $j = 0, \ldots, N$, en prenant $h = h_j - t$ (on a bien $h \in [0, \Delta]$, car $h \leq h_j$), on a

$$|B_{h_j} - B_t| < C\sqrt{h_j}.$$

Et donc pour tout $j = 1, \ldots, N$,

$$|B_{h_j} - B_{h_{j-1}}| < 2C\sqrt{h_j},$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\exists t \in [0, \frac{1}{n}] : |B_{t+h} - B_t| < C\sqrt{h} \ \ \forall h \in [0, \Delta]) \\
&\qquad \leq \ \mathbb{P}(\forall j \in \{1, \ldots, N\} : |B_{h_j} - B_{h_{j-1}}| < 2C\sqrt{h_j}) \\
&\qquad \leq \prod_{j=1}^{N} \ \mathbb{P}(|B_{h_j} - B_{h_{j-1}}| < 2C\sqrt{h_j}) \text{ par indépendance des accroissements} \\
&\qquad \leq \prod_{j=1}^{N} \ \mathbb{P}(|Z| < 2C\frac{\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_j - h_{j-1}}}) \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0, 1)
\end{aligned}$$

On souhaite choisir C (indépendante de n et j) et trouver une famille $(h_j)_{j=1,\ldots,N}$ tels que $n \prod_{j=1}^{N} \ \mathbb{P}(|Z| < 2C\frac{\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_j - h_{j-1}}})$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$.
En prenant $h_j = 2^j/n$, avec $N = [\ln(n\Delta)/\ln(2)]$, la famille satisfait bien les hypothèses voulues et

$$\mathbb{P}(|Z| < 2C\frac{\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_j - h_{j-1}}}) = \ \mathbb{P}(|Z| < 2C\sqrt{2})$$

En choisissant $C > 0$ tel que $\mathbb{P}(|Z| < 2C\sqrt{2}) \leq 1/4$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\exists t > 0 : |B_{t+h} - B_t| < C\sqrt{h} \ \ \forall h \in [0, \Delta]) &\leq n \left(\frac{1}{4}\right)^N \leq n \left(\frac{1}{4}\right)^{\ln(n\Delta)/\ln(2)} \\
&\leq \frac{1}{n\Delta^2}.
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient le résultat. $\triangle$

6 La mesure de Wiener

On note $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1], I\!R)$ ou $\mathcal{C}([0,\infty[, I\!R)$ l'espace des fonctions continues à valeurs dans $I\!R$.
$\mathcal{C}$ muni de la norme uniforme est un espace de Banach (dans le cas, de fonctions définie sur $[0,+\infty)$ on utilise la norme $d(u,v) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \min(||u-v||_n, 1)$ où $||u-v||_n = \sup\{|u(x)-v(x)| : x \in [0,n]\}$).
On munit $\mathcal{C}$ de sa tribu borélienne. C'est la tribu engendrée par les ouverts élémentaires : $n \geq 1$, $0 < t_1 < \ldots < t_n$, $A_1, \ldots, A_n$ des ouverts de $I\!R$

$$O = \{\omega \in \mathcal{C} : \omega(t_1) \in A_1, \ldots \omega(t_1) \in A_n\}. \tag{6.2}$$

Définition 6.1 Soit B un mouvement brownien. B est à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}$. La loi de cette v.a. sur $\mathcal{C}$ est appelée *mesure de Wiener*.
L'espace $\mathcal{C}$ muni de la mesure de Wiener est appelé espace de Wiener.

Si on considère deux variables aléatoires X et Y, on sait que la loi de chacune des variables ne suffit pas pour connaître la loi du couple. De même, pour le mouvement brownien, on peut se demander si la définition du brownien caractérise de façon unique la mesure de Wiener.

Propriété 6.2 La mesure de Wiener est unique : si $\mathbb{W}$ et $\mathbb{Q}$ sont deux probabilités sur $\mathcal{C}$ chacune issue d'un mouvement brownien, alors $\mathbb{W} = \mathbb{Q}$.

Preuve.
Rappel : *Théorème des classes monotones*
Soit $\mathcal{L}$ une famille de partie de l'espace E un λ-système, i.e.

- $E \in \mathcal{S}$,
- si $A, B \in \mathcal{S}$ avec A inclus dans B alors $A^c \in \mathcal{S}$,
- si stable par union dénombrable croissante.

Soit $\mathcal{P}$ un π-système, i.e. stable par intersection finie. :
Si $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$, alors $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.

On remarque que $\mathcal{P}$ l'ensemble des ouverts élémentaires est un π-système.
Soit $\mathcal{L} = \{\Lambda \in \mathcal{B} : \mathbb{W}(\Lambda) = \mathbb{Q}(\Lambda)\}$, où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $\mathcal{C}([0,1], I\!R)$. $\mathcal{L}$ est un λ-système.
Soit O est un ouvert élémentaire, montrons que $O \in \mathcal{L}$. En effet si $\mathbb{W}$ est issu du mvt brownien B et $\mathbb{Q}$ est issu du mvt brownien $\tilde{B}$ et $O = \{\omega \in \mathcal{C} : \omega(t_1) \in A_1, \ldots \omega(t_1) \in A_n\}$ un ouvert élémentaire, on a

$$\mathbb{W}(O) = I\!P(B_{t_1} \in A_1, \ldots, B_{t_n} \in A_n) = I\!P(\tilde{B}_{t_1} \in A_1, \ldots, \tilde{B}_{t_n} \in A_n) = \mathbb{Q}(O).$$

Alors $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B} \subset \mathcal{L}$. Donc $\mathbb{W} = \mathbb{Q}$. $\triangle$

Remarque 6.3 On a en fait démontré que la loi d'un processus est entièrement déterminée par les lois finis dimensionnelles.

Remarque 6.4 Comment définir le mouvement brownien en dimension plus grande ?
Un mouvement brownien $B = (B^1, \ldots, B^d)$ à valeurs dans $I\!R^d$ est un processus tel que les B^i sont des mouvements browniens indépendants, i.e. pour tous ouverts O_i de $\mathcal{C}$ $I\!P(B^1 \in O_1 \cap \ldots \cap B^d \in O_d) = I\!P(B^1 \in O_1) \ldots I\!P(B^d \in O_d)$.

Bibliographie

[1] Jean-François Le Gall. Introduction au mouvement brownien. *Gazette des Mathématiciens*, 40, 1989.

[2] Dominique Foata et Aimé Fuchs. *Processus stochastiques*. Dunod, 1998.

[3] Daniel Revuz et Marc Yor. *Continuous martingales and brownian motion*. Springer, 1991.

[4] Claude Dellacherie et Paul-André Meyer. *Probabilités et potentiels*. Hermann, 1975.

[5] Ioannis Karatzas et Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer, 1991.

[6] Hui-Hsiung Kuo. *Introduction to stochastic integration*. Springer, 2006.

[7] Edward Nelson. *Dynamical theories of Brownian motion*. http ://www.math.princeton.edu /∼nelson/books/bmotion.pdf.

[8] Philip Protter. *Stochastic integration and differential equations*. Springer, 1995.

Chapitre 2

Le mouvement Brownien en tant que processus de Markov

On définit tout d'abord la notion de filtration :

Définition 0.5 Une *filtration* sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ est une famille $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sous-tibus telle que $\forall s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est *$\mathbb{P}$-complète* pour une certaine mesure de probabilité $\mathbb{P}$, si $\mathcal{F}_0$ contient tous les événements de mesure nulle, i.e. $\mathcal{N} = \{N \subset \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(N) = 0\}$.

Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est *continue à droite* si $\forall t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ où $\mathcal{F}_{t^+} = \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \cap_{n>0}\mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}$.

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration alors $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ définie par $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t^{\text{cpl}}$ (complétion par rapport à la mesure $\mathbb{P}$, $\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{N})$) est une filtration complète pour $\mathbb{P}$.

On dit qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfait *les conditions habituelles* si elle est continue à droite et complète.

1 Premières propriétés du mouvement brownien

Propriété 1.1 Soit B un mouvement brownien. Alors

- *Symétrie* : $-B$ est un mouvement brownien,
- *Propriété de scaling* : soit $k > 0$, $(\frac{1}{\sqrt{k}}B_{kt}, t \geq 0)$ est un mouvement brownien,
- *Inversion du temps* : $(tB_{\frac{1}{t}}, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Preuve. Il est facile de vérifier que ces processus sont gaussiens, centrés, continus et de covariance $t \wedge s$. Pour montrer la continuité de $(tB_{\frac{1}{t}}, t \geq 0)$ en 0, il suffit d'utiliser la fait que les trajectoires browniennes sont α-höldériennes, avec $\alpha < 1/2$. $\triangle$

1.1 Propriéte de Markov simple

Définition 1.2 Soit B un mouvement brownien. On appelle *filtration brownienne* la filtration définie pour tout $t \geq 0$ par $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)^{\text{cpl}}$.

Proposition 1.3 *Propriété de Markov simple.*
On fixe $t \geq 0$ et on définit $\tilde{B}$ par : $\forall s \geq 0$, $\tilde{B}_s = B_{t+s} - B_t$.
Comme les accroissements du brownien sont indépendants et stationnaires, le processus $\tilde{B}$ est indépendant de $\mathcal{F}_t^B$ et a la même loi que B.

Propriété 1.4 La filtration brownienne $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ est continue à droite.

Exemple 1.5 Voici un exemple de filtration non continue à droite.
On considère le processus X défini par : $X_t = t\varepsilon$ où ε est une variable de Bernoulli : $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$.
On a $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale et $\mathcal{F}_t = \sigma(\varepsilon)$ pour $t > 0$. Par contre, $\mathcal{F}_{0^+} = \sigma(\varepsilon) \neq \mathcal{F}_0$.

Corollaire 1.6 *Loi du 0-1 de Blumenthal.*
La tribu $\mathcal{F}_{0^+}^B$ est triviale : i.e. $\mathbb{P}(\Lambda) = 0$ ou 1 pour tout $\Lambda \in \mathcal{F}_{0^+}^B$.

Conséquence 1.7 On définit S le processus : $t \geq 0$

$$S_t = \sup_{0\leq s\leq t} B_s.$$

La mesurabilité de S_t est assurée par la continuité du mouvement brownien.
Alors $\mathbb{P}(S_t > 0, \forall t > 0) = 1$. Le brownien prend des valeurs > 0 p.s.
De même, si on note $I_t = \inf_{0\leq s\leq t} B_s$, en utilisant la propriété de symétrie, on a $\mathbb{P}(I_t < 0, \forall t > 0) = 1$.
Comme les trajectoires de B sont continues, on a par conséquent que p.s. l'ensemble $\{t \geq 0 : B_t = 0\}$ admet 0 comme point d'accumulation.

Preuve. on remarque que $\{S_t > 0, \forall t > 0\} \in \mathcal{F}_{0^+}^B$, car $S_t \in \mathcal{F}_t^B$ pour tout $t \geq 0$ et

$$\{S_t > 0, \forall t > 0\} = \cap_{n>0}\{S_{\frac{1}{n}} > 0\} \in \mathcal{F}_{0^+}^B \quad \text{(intersection décroissante).}$$

D'après le loi de Blumenthal, on a donc

$$\mathbb{P}(S_t > 0, \forall t > 0) = 0 \text{ ou } 1.$$

Par ailleurs $\mathbb{P}(S_t > 0) \geq \mathbb{P}(B_t > 0) = 1/2$, donc $\mathbb{P}(S_t > 0, \forall t > 0) = 1$. △

Preuve de la continuité à droite de la filtration brownienne.

i) Montrons que $\mathcal{F}_{0^+}^B$ est la tibu triviale.

On considère le processus X_n défini sur $[0, 2^{-n}]$: $X_n = (B_{2^{-n}+t} - B_{2^{-n}}, 0 \leq t \leq 2^{-n})$. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables indépendantes. On remarque que l'on peut retrouver la trajectoire du brownien à partir des variables $X_k, k \geq n$:

$$B_{2^{-n}+t} = X_n(t) + \sum_{k=1}^{\infty} X_{n+k}(2^{-n-k}).$$

Par conséquent,

$$\mathcal{F}_{2^{-n}} = \sigma(X_{n+1}, \ldots, X_{n+k}, \ldots)$$

et comme $\mathcal{F}_{0^+} = \cap_{n\geq 0}\mathcal{F}_{2^{-n}}$, $\mathcal{F}_{0^+}$ est la tribu asymptotique engendrée par les processus indépendants X_n. D'après la loi du 0-1 de Kolmogorov, $\mathcal{F}_{0^+}^B$ est triviale.

ii) Montrons que $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ est continue à droite.

soit C un ensemble de fonctions stable par multiplication.
Si $C \subset E$, alors E contient toutes les fonctions $\sigma(C)$-mesurables.

Soit $t \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. On considère la tribu

$$\mathcal{G}_t = \sigma(B_{t+s} - B_t, s \geq 0)$$

Montrons que $\mathcal{G}_t$ est indépendante de $\mathcal{F}^B_{t^+}$.
Par construction, $\mathcal{G}_{t+\varepsilon}$ est indépendante de $\mathcal{F}^B_{t+\varepsilon}$ et donc indépendante de $\mathcal{F}^B_{t^+} = \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}^B_{t+\varepsilon}$. La famille $(\mathcal{G}_{t+\varepsilon})_\varepsilon$ est croissante, de limite $\bigvee_{\varepsilon>0}\mathcal{G}_{t+\varepsilon}$.
Par ailleurs, par continuité des trajectoires browniennes, $\forall s \geq 0$ $B_{t+s} - B_t = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} B_{t+s+\varepsilon} - B_{t+\varepsilon}$, donc $B_{t+s} - B_t$ est mesurable par rapport à $\bigvee_{\varepsilon>0}\mathcal{G}_{t+\varepsilon}$, d'où $\mathcal{G}_t = \bigvee_{\varepsilon>0}\mathcal{G}_{t+\varepsilon}$ et donc $\mathcal{G}_t$ est indépendante de $\mathcal{F}^B_{t^+}$.
Soit des variables bornées telles que X soit $\mathcal{F}^B_t$-mesurable, Y $\mathcal{F}^B_{t^+}$-mesurable et Z $\mathcal{G}_t$-mesurable. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XZY] &= \mathbb{E}[XY]\mathbb{E}[Z] \text{ car } \mathcal{F}^B_{t^+} \text{ et } \mathcal{G}_t \text{ indépendantes} \\
&= \mathbb{E}[XZ\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}^B_t]] = \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}^B_t]]\mathbb{E}[Z]
\end{aligned}$$

Considérons l'e.v. des variables bornées W telles que $\mathbb{E}[WY] = \mathbb{E}[W\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}^B_t]]$. Cet espace contient les variables de la forme XZ avec $X \in L^\infty(\mathcal{F}^B_t)$ et $Z \in L^\infty(\mathcal{G}_t)$. L'espace vectoriel W contient toutes les v.a. mesurables par rapport à $\mathcal{G}_t \bigvee \mathcal{F}^B_t = \mathcal{F}^B$ où $\mathcal{F}^B$ est la tribu engendrée par tout le mouvement brownien.
Conclusion :
$\mathbb{E}[WY] = \mathbb{E}[W\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}^B_t]]$ pour tout $W \in L^\infty(\mathcal{F}^B)$, d'où $Y = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}^B_t]$ p.s.
Comme la tribu est complète, Y coïncide avec une variable $\mathcal{F}^B_t$-mesurable. △

Remarque 1.8 En fait, la filtration brownienne $(\mathcal{F}^B_t)_{t\geq 0}$ est aussi continue à gauche : i.e. $\mathcal{F}^B_t = \bigvee_{\varepsilon>0}\mathcal{F}^B_{t-\varepsilon}$.
Dans la suite seule la continuité à droite nous intéressera.

On va maintenant réécrire la propriété de Markov du mouvement brownien dans le cadre "classique" de la théorie des processus de Markov : "indépendance du futur et du passé conditionnellement un présent".
Notons $\mathbb{P}_x$ pour $x \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$) la loi du mouvement brownien issu de x, i.e. la loi de $x + B$ où B est un mouvement brownien.

Propriété 1.9 *Propriété de Markov simple, $2^{\text{ème}}$ version.*
Soit $t \geq 0$ fixé. On pose $B'_s = B_{t+s}$, $\forall s \geq 0$.
Conditionnellement à $B_t = x$, le processus B' est indépendant de $\mathcal{F}^B_t$ et a pour loi $\mathbb{P}_x$.

Preuve. On remarque que $B'_s = B_{t+s} - B_t + B_t$, où $\tilde{B}_s = B_{t+s} - B_t$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}^B_t$ et B_t est une variable $\mathcal{F}^B_t$-mesurable. D'où le résultat. △

1.2 Semi-groupe associé au mouvement brownien

Soit B un mouvement brownien. Soit f une fonction mesurable bornée, on définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E_x[f(B_t)] = \mathbb{E}[f(x + B_t)]$.

Définition-Proposition 1.10 Soit f une fonction mesurable positive (ou bornée). On définit pour $t \geq 0$

$$P_t(f) = E_x[f(B_t)].$$

Alors

- $P_t : L^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$,
- P_t est un opérateur de convolution

$$P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbb{R} f(x+y) e^{-\frac{y^2}{2t}} dy.$$

Comme pour f bornée, $\mathbb{E}[f(B_{t+s})|\mathcal{F}_t] = E_{B_t}[f(B_s)]$, on peut exprimer la propriété de Markov simple de la façon suivante :

$$\forall Y \ \mathcal{F}_t\text{-mesurable bornée, } \mathbb{E}[Y f(B_{t+s})] = \mathbb{E}[Y P_s f(B_t)].$$

Propriété 1.11 $(P_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe :
- $P_0 = id$,
- $P_{t+s} = P_t \circ P_s$ pour tout $t, s \geq 0$.

En fait, c'est même un semi-groupe de Feller.

Définition 1.12 Une famille d'opérateurs $(P_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de Feller sur $\mathcal{C}_0(E)$ si $\forall t$ P_t est un opérateur linéaire de $\mathcal{C}_0(E)$ dans $\mathcal{C}_0(E)$ tel que
- $P_0 = id$ et $||P_t|| \geq 1$ pour tout $t \geq 0$,
- $P_{t+s} = P_t \circ P_s$ pour tout $t, s \geq 0$,
- pour tout $f \in \mathcal{C}(E)$, $P_t f \underset{t\searrow 0}{\longrightarrow} f$ au sens de la norme uniforme.

($\mathcal{C}_0(E)$ est l'ensemble des fonctions sur E qui tendent vers 0 à l'infini.)

Preuve. Soit $t, s \geq 0$ et f mesurable bornée,

$$\begin{aligned} P_{t+s} f(x) &= E_x[f(B_{t+s})] = E_x[f(B_{t+s} - B_t + B_t)] = E_x[E_x[f(B_{t+s} - B_t + B_t)|\mathcal{F}_t]] \\ &= E_x[P_s f(B_t)] = P_t(P_s f)(x) \quad \text{d'après la propriété de Markov.} \end{aligned}$$

Si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, alors f et bornée qui converge vers 0 à l'infini d'après le théorème de convergence dominée, donc $P_t(f) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.
Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, par conséquent f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists \eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R} : |x - y| < \eta$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} |P_t f(x) - f(x)| &\leq \mathbb{E}[|f(x + B_t) - f(x)|] \leq \varepsilon \, \mathbb{P}(|B_t| < \eta) + \mathbb{E}[(f(x + B_t) - f(x)) \, \mathbb{I}_{|B_t|\geq\eta}] \\ &\leq \varepsilon + 2||f||_\infty \, \mathbb{P}(|B_t| \geq \eta) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $B_t \overset{\text{proba}}{\underset{t\to 0}{\longrightarrow}} 0$, donc il existe t_η tel que $\forall t \leq t_\eta$, $\mathbb{P}(|B_t| \geq \eta) \leq \varepsilon$. Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0$, alors $\exists t_\eta > 0$ tel que $\forall t \leq t_\eta$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|P_t f(x) - f(x)| \leq \varepsilon(1 + 2||f||_\infty).$$

D'où la convergence uniforme. $\triangle$

Remarque 1.13 Ces propriétés restent vraies en dimension $d \geq 1$.

2 Propriété de Markov forte et applications

2.1 Notion de temps d'arrêt

Définition 2.1 Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. On dit qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, +\infty]$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-*temps d'arrêt* si

$$\forall t \geq 0, \quad \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Propriété 2.2 Soient T et S deux $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt, alors $T\wedge S$ et $T\vee S$ sont des $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt.
Si $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite monotone de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt, alors $T=\lim T_n$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt.

Remarque 2.3 Si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration continue à droite, alors T est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt ssi

$$\forall t\geq 0,\quad \{T<t\}\in\mathcal{F}_t^B.$$

C'est notamment le cas de la filtration brownienne.

Preuve. En effet, si T vérifie cette propriété, on a

$$\{T\leq t\}=\bigcap_{\varepsilon>0}\{T<t+\varepsilon\}\subset\mathcal{F}_{t^+}=\mathcal{F}_t.$$

$\triangle$

Exemple 2.4 Soit O un ouvert et F un fermé, alors

$$T_O=\inf\{t\geq 0: B_t\in O\}\quad\text{et}\quad T_F=\inf\{t\geq 0: B_t\in F\}$$

sont des $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt.

Preuve. • Soit O un ouvert. Soit $t\geq 0$, on a

$$\begin{aligned}\{T_O<t\} &= \{\exists s<t: B_s\in O\}=\{\exists s\in[0,t[\cap\mathbb{Q}: B_s\in O\}\quad\text{par continuité des trajectoires}\\ &= \bigcup_{s\in[0,t[\cap\mathbb{Q}}\{B_s\in O\}\end{aligned}$$

Comme $\{B_s\in O\}\in\mathcal{F}_s$, on a bien que $\{T_O<t\}\in\mathcal{F}_t$. Donc T_O est un $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt.

• Soit F un fermé et $t\geq 0$.

$$\begin{aligned}\{T_F\leq t\} &= \{\omega\in\Omega: \inf_{0\leq s\leq t} d(B_s(\omega),F)=0\}\\ &= \{\omega\in\Omega: \inf_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} d(B_s(\omega),F)=0\}\end{aligned}$$

car B est continu et donc la distance aussi. Par ailleurs, un inf dénombrable de fonctions mesurables est mesurable. Par conséquent, $\{T_T\leq t\}\in\mathcal{F}_t$ et donc T_F est un $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt.

$\triangle$

Définition 2.5 Soit T un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt. On dit que T est un *temps d'arrêt simple* si l'ensemble des valeurs prises par T est au plus dénombrable, i.e. il existe une suite (t_n) de temps positifs dans $\overline{\mathbb{R}}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(T=t_n)=1$.

Proposition 2.6 Soit T un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt. Alors il existe une suite décroissante $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt simples telle que p.s. $\lim_{n\to+\infty}T_n=T$.

Preuve.
On pose $T_n=([T2^n]+1)2^{-n}$ sur $\{T<\infty\}$, i.e. $T_n=(j+1)2^{-n}$ sur l'événement $\{T\in[j2^{-n},(j+1)2^{-n}[\}$ et $T_n=\infty$ sur $\{T=\infty\}$.

Vérifions que T_n est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt :

$$\begin{aligned}\{T_n \leq t\} &= \bigcup_{j=0}^{p-1} \{T_n = (j+1)2^{-n}\} \quad \text{avec } p \text{ tel que } p2^{-n} \leq t < (p+1)2^{-n} \\ &= \bigcup_{j=0}^{p-1} \{T \in [j2^{-n}, (j+1)2^{-n}[\} \\ &= \{T \in [0, p2^{-n}[\} \in \mathcal{F}_{p2^{-n}} \subset \mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

Par construction, p.s. $\lim_{n\to+\infty} T_n = T$.

△

Définition 2.7 Soit T un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt. On définit la tribu

$$\mathcal{F}_T = \{\Lambda \in \mathcal{F} : \forall t \geq 0 \quad \Lambda \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Remarque 2.8 Si $T = t$ est déterministe, alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$.
Si T et S sont deux $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt tels que $T \leq S$, alors $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_S$.

Proposition 2.9 Soit T un $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt fini p.s.. Alors T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Preuve. Soit $s \geq 0$, on veut montrer que $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_T$. Soit $t \geq 0$, on a

$$\{T \leq s\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq s \wedge t\}.$$

Comme T est un temps d'arrêt, $\{T \leq s \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$, ceci $\forall t \geq 0$. Donc $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_T$ pour tout $s \geq 0$ et T est bien $\mathcal{F}_T$ mesurable. △

2.2 Propriété de Markov forte

Théorème 2.10 *Propriété de Markov forte*
Soit T un $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt fini p.s.. On note $\tilde{B}$ le processus : pour $s \geq 0$ $\tilde{B}_s = B_{T+s} - B_T$. Alors le processus $\tilde{B}$ est indépendant de $\mathcal{F}_T^B$ et a même loi que B.

De façon équivalente, la propriété s'énonce : conditionnellement à $B_T = x$, le processus B', définit par $B'_s = B_{T+s}$, est indépendant de $\mathcal{F}_T^B$ et a pour loi $\mathbb{P}_x$ (loi du mouvement brownien issu de x).

Preuve. Soit T un $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt fini p.s. On pose pour $s \geq 0$, $\tilde{B}_s = B_{T+s} - B_T$.

i) Si T est déterministe.

Le résultat est vrai, c'est la propriété de Markov simple.

ii) Si T est un temps d'arrêt simple.

Alors il existe une suite (t_n) de temps positifs telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T = t_n) = 1$. Soient $\Lambda \in \mathcal{F}_T$ et $\phi : \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. Alors, par Fubini

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_\Lambda \phi(\tilde{B})] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{I}_\Lambda \mathbb{I}_{T=t_n} \phi(\tilde{B})]$$

Sur l'événement $\{T = t_n\}$, $\tilde{B}_s = \tilde{B}_s^n$ où $\tilde{B}^n$ est le processus défini par $\tilde{B}_s^n = B_{t_n+s} - B_{t_n}$.
D'après la propriété de Markov simple, $\tilde{B}^n$ est indépendant de $\mathcal{F}_{t_n}$ et a même loi que B.
Comme $\mathbb{I}_\lambda \mathbb{I}_{T=t_n}$ est $\mathcal{F}_{t_n}$-mesurable, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{I}_\Lambda \phi(\tilde{B})] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{I}_\Lambda \mathbb{I}_{T=t_n}] \mathbb{E}[\phi(B)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{I}_\Lambda] \mathbb{E}[\phi(B)].\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour les temps d'arrêt simples.

iii) Si T est un temps d'arrêt p.s. fini.

Il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt simples telle que p.s. $\lim_{n\to+\infty} T_n = T$.

On note $\tilde{B}^n_s = B_{T_n+s} - B_{T_n}$. On sait que le processus $\tilde{B}^n$ est indépendant de $\mathcal{F}_{T_n}$ et a même loi que B.

Comme $T_n \geq T$, on a $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T_n}$, donc $\tilde{B}^n$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$. Par ailleurs,

$$\tilde{B}^n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{B} \quad \text{uniformément sur les compacts.}$$

Donc $\tilde{B}$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$ et a même loi que B. △

2.3 Application : principe de réflexion

Théorème 2.11 *Principe de réflexion*

Soit B un mouvement brownien et $S_t = sup\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$ pour $t \geq 0$. Soit $a \geq 0$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $b \leq a$, on a

$$\mathbb{P}(S_t > a, B_t < b) = \mathbb{P}(B_t > 2a - b)$$

En particulier, pour tout $t \geq 0$ fixé $S_t \stackrel{Loi}{=} |B_t|$.

<u>Attention</u> : il n'y a pas égalité en loi des processus S et $|B|$. En effet, S est un processus croissant et pas $|B|$.

Preuve. Soit $b \leq a$. On note $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$.

On remarque que $\{S_t > a\} = \{T_a < t\}$ et donc

$$\mathbb{P}(S_t > a, B_t < b) = \mathbb{P}(T_a < t, B_t < b).$$

On note $\tilde{B}_t := B_{T_a+t} - B_{T_a} = B_{T_a+t} - a$. D'après la propriété de Markov forte $\tilde{B}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_a < t, B_t < b) &= \mathbb{P}(T_a < t, \tilde{B}_{t-T_a} < b - a) \\
&= \int_0^t \mathbb{P}(T_a \in ds)\ \mathbb{P}(\tilde{B}_{t-s} < b - a) \\
&= \int_0^t \mathbb{P}(T_a \in ds)\ \mathbb{P}(\tilde{B}_{t-s} > a - b) \quad \text{par symétrie} \\
&= \mathbb{P}(T_a < t, \tilde{B}_{t-T_a} > a - b) = \mathbb{P}(T_a < t, B_t > 2a - b)
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_t > a) &= \mathbb{P}(S_t > a, B_t > a) + \mathbb{P}(S_t > a, B_t \leq a) \\
&= \mathbb{P}(B_t > a) + \mathbb{P}(B_t > a) \quad \text{par le principe de réflexion} \\
&= \mathbb{P}(|B_t| > a) \quad \text{par symétrie.}
\end{aligned}$$

△

Théorème 2.12 *Loi du logarithme itéré* (Khintchine, 1933)

$$\text{p.s.} \qquad \limsup_{t\to 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log \frac{1}{t}}} = 1.$$

Remarque 2.13 On peut remplacer B_t par $|B_t|$ par symétrie du mouvement brownien.

Preuve.

i) Majoration.

Soit $\alpha > 1$ et $r \in (0,1)$. Par scaling, on a $S_{r^n} \overset{Loi}{=} \sqrt{r^n} S_1$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{r^n} > \alpha\sqrt{2r^{n+1}\log\log(r^{-n})}) &= \mathbb{P}(S_1 > \alpha\sqrt{2r\log\log(r^{-n})}) \\
&= 2\ \mathbb{P}(B_1 > \alpha\sqrt{2r\log\log(r^{-n})}) \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\alpha^2 r \log\log(r^{-n})\right) \\
&\leq \text{cste } n^{-\alpha^2 r}.
\end{aligned}$$

En choisissant r tel que $\alpha^2 r > 1$, d'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s. pour n assez grand

$$S_{r^n} \leq \alpha\sqrt{2r^{n+1}\log\log(r^{-n})}.$$

Pour t assez petit : $r^{n+1} \leq t < r^n$, alors $B_t \leq S_{r^n} \leq \alpha\sqrt{2t\log\log(1/t)}$, alors

$$\text{p.s.} \qquad \limsup_{t\to 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log\frac{1}{t}}} \leq 1.$$

ii) Minoration.

On va utiliser l'indépendance des accroissements du brownien.
Rappel : Minoration de la queue gaussienne : Soit $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, pour $\beta > 1$ et x assez grand,

$$P(N > x) \geq e^{-x^2\beta^2/2}.$$

En effet,

$$P(N > x) \geq \int_x^{\beta x} e^{-y^2/2} dy \geq x(\beta - 1)e^{-x^2\beta^2/2}.$$

Soit $\alpha < 1$ et $r \in (0,1)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_{r^n} - B_{r^{n+1}} > \alpha\sqrt{1-r}\sqrt{2r^n\log\log(r^{-n})}) &= \mathbb{P}(N > \alpha\sqrt{2\log\log(r^{-n})}) \\
&\geq e^{-\beta^2\alpha^2\log\log(r^{-n})} \qquad \text{pour } \beta > 1 \text{ et } r \text{ assez petit} \\
&= \text{cste } n^{-\alpha^2\beta^2}
\end{aligned}$$

En choisissant $\beta > 1$ avec $\alpha^2\beta^2 \geq 1$, on reconnaît le terme général d'une série divergente. Donc, du fait que les événements sont indépendants (par indépendance des accroissements du mouvements brownien), d'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s. infiniment souvent,

$$\frac{B_{r^n}}{\sqrt{2r^n\log\log(r^{-n})}} > \alpha\sqrt{1-r} + \frac{B_{r^{n+1}}}{\sqrt{2r^n\log\log(r^{-n})}}.$$

D'après le première partie de la preuve, on a donc p.s. infiniment souvent,

$$\alpha\sqrt{2r} = \frac{\alpha\sqrt{2r^{n+1}\log\log(r^{-n})}}{\sqrt{2r^n\log\log(r^{-n})}} > \alpha\sqrt{1-r} + \frac{B_{r^{n+1}}}{\sqrt{2r^n\log\log(r^{-n})}}.$$

Par symétrie du mouvement brownien, $B \overset{Loi}{=} -B$, p.s. infiniment souvent,

$$\frac{B_{r^{n+1}}}{\sqrt{2r^n\log\log(r^{-n})}} > \alpha\sqrt{1-r} - \alpha\sqrt{2r}.$$

En prenant, α proche de 1 et r aussi petit que l'on veut,

$$\text{p.s.} \qquad \limsup_{t\to 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log\frac{1}{t}}} \geq 1.$$

$\triangle$

Bibliographie

[1] Jean-François Le Gall. Introduction au mouvement brownien. *Gazette des Mathématiciens*, 40, 1989.

[2] Dominique Foata et Aimé Fuchs. *Processus stochastiques*. Dunod, 1998.

[3] Daniel Revuz et Marc Yor. *Continuous martingales and brownian motion*. Springer, 1991.

[4] Claude Dellacherie et Paul-André Meyer. *Probabilités et potentiels*. Hermann, 1975.

[5] Ioannis Karatzas et Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer, 1991.

[6] Hui-Hsiung Kuo. *Introduction to stochastic integration*. Springer, 2006.

[7] Edward Nelson. *Dynamical theories of Brownian motion*. http ://www.math.princeton.edu /∼nelson/books/bmotion.pdf.

[8] Philip Protter. *Stochastic integration and differential equations*. Springer, 1995.

Chapitre 3

Processus et martingales en temps continu

1 Quelques rappels sur les martingales en temps discret (voir [4])

On considère un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0},\ \mathbb{P})$. On note $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$.

Définition 1.1 Une suite de variables $(M_n)_{n\geq 0}$ est dite *adaptée à* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si pour tout $n \geq$, M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.
Une suite de variables $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$*-sousmartingale discrète* si elle est adaptée et si pour tout $n \geq 0$,

$$M_n \in L^1 \quad \text{et} \quad M_n \leq \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n].$$

Une suite de variables $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$*-surmartingale discrète* si elle est adaptée et si pour tout $n \geq 0$,

$$M_n \in L^1 \quad \text{et} \quad M_n \geq \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n].$$

Une suite de variables $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$*-martingale discrète* si elle est adaptée et si pour tout $n \geq 0$,

$$M_n \in L^1 \quad \text{et} \quad M_n = \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n].$$

Proposition 1.2 *Inégalité de Jensen conditionnelle*
Soit $M \in L^1(\mathcal{F})$, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et φ une fonction convexe telle que $\varphi(M) \in L^1(\mathcal{F})$, alors

$$\varphi\left(\mathbb{E}[M|\mathcal{G}]\right) \leq E\left[\varphi(M)|\mathcal{G}\right].$$

Remarque 1.3 Si $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-sousmartingale, alors $(M_n^+)_{n\geq 0}$ et $(M_n \mathbb{I}_{M_n > C})_{n\geq 0}$ sont des $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-sousmartingales, pour $C \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.4 Si $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale et φ une fonction convexe, telle que $\forall n \geq 0$, $\varphi(M_n) \in L^1$. Alors $(\varphi(M_n))_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-sousmartingale.

1.1 Martingales et temps d'arrêt

Définition 1.5 Une v.a. T à valeurs dans $[0, +\infty]$ est un $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-temps d'arrêt si $\forall n \geq 0$

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

On définit la tribu $\mathcal{F}_T$ la tribu des événements antérieurs à T

$$\mathcal{F}_T = \{\Lambda \in \mathcal{F}_\infty : \Lambda \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \geq 0\}.$$

Proposition 1.6 1. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale (sur ou sous) et T un $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-temps d'arrêt. Alors $(M_n^T)_{n\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale (sur ou sous), où $M_n^T = M_{T\wedge n}$.

2. Si $Y \in L^1$, alors $\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_T] = \sum_{n\in\overline{I\!N}} \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]\mathbb{I}_{T=n}$.

Preuve. 1. $M_n^T = M_n\mathbb{I}_{T\geq n} + M_T\mathbb{I}_{T<n}$ est bien $\mathcal{F}_n$-mesurable et dans L^1 et

$$\mathbb{E}[M_{n+1}^t|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]\mathbb{I}_{T\geq n+1} + M_T\mathbb{I}_{T<n+1} = M_n^T$$

2. Soit $Z \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$

$$\mathbb{E}[YZ] = \sum_{n\in\overline{I\!N}} \mathbb{E}[YZ\mathbb{I}_{T=n}] = E\left[Z\left(\sum_{n\in\overline{I\!N}} \mathbb{I}_{T=n}\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]\right)\right]$$

△

Théorème 1.7 *Théorème d'arrêt*
Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale (sur ou sous). Soit T et S deux $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-temps d'arrêt et T borné. Alors sur $\{S \leq T\}$, $\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_S] = M_S$ (resp. $\leq$ et $\geq$).

Preuve. Supposons que $S \leq T$.
Si $S = p$ déterministe et comme T borné par K. $(M_n^T)_{n\leq 0}$ est une martingale, donc pour $n \geq p$ $\mathbb{E}[M_K^T|\mathcal{F}_p] = M_{K\wedge p}^T = M_{T\wedge p}$ et comme $M_K^T = M_T$ on a le résultat.

Si S est aléatoire,

$$\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_S] = \sum \mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_n]\mathbb{I}_{S=n} = \sum M_n\mathbb{I}_{S=n} = M_S.$$

Cas général, on pose $\tilde{S} = S \wedge T$. On a $\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_{\tilde{S}}] = M_{\tilde{S}}$. Comme sur $\{S \leq T\}$ on a $S = \tilde{S}$, on obtient le résultat.

△

1.2 Inégalités importantes

Proposition 1.8 *Lemme Maximal* Soit $C > 0$.
Si $(M_n)_{n\geq 0}$ est une sousmartingale, alors

$$P(\sup_n M_n \geq C) \leq \frac{1}{C}\sup_n \mathbb{E}[M_n^+].$$

Si $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, alors

$$P(\sup_n M_n \geq C) \leq \frac{1}{C}\sup_n \mathbb{E}[|M_n|].$$

Si $(M_n)_{n\geq 0}$ est une surmartingale positive, alors

$$P(\sup_n M_n \geq C) \leq \frac{1}{C}\mathbb{E}[M_0].$$

Preuve.

1. On considère le temps d'arrêt $T = \inf\{n \geq 0 : M_n \geq C\}$. On pose $\tau_n = T \wedge n$, d'où $C\mathbb{I}_{\{\tau_n \leq n\}} \leq M_{\tau_n} = M^+_{\tau_n}$ car $C > 0$. On utilise alors le théorème d'arrêt
$$C\ \mathbb{P}(\tau_n \leq n) \leq \mathbb{E}[M^+_{\tau_n}] \leq \mathbb{E}[M^+_n].$$
et on fait $n \to +\infty$.
2. M_n et $-M_n$ sont des sousmartingales.
3. De même on a $C\mathbb{I}_{\{T\geq n\}} \leq M_{\tau_n}$ et par le théorème d'arrêt $\mathbb{E}[M_{\tau_n}] \leq \mathbb{E}[M_0]$.

△

Proposition 1.9 *Inégalité du nombre de montées*

1. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ est une surmartingale et $\overline{m}^M_{a,b}(n)$ le nombre de montées de a à b effectuées par M avant l'instant n. Alors
$$\mathbb{E}[\overline{m}^M_{a,b}(n)] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(M_n - a)^-].$$
2. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ est une sousmartingale et $\underline{m}^M_{a,b}(n)$ le nombre de descentes de b à a effectuées par M avant l'instant n. Alors
$$\mathbb{E}[\underline{m}^M_{a,b}(n)] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(M_n - b)^+].$$

Preuve. On remarque que 2. implique 1. car $-M_n$ est une sousmartingale et $\overline{m}^M_{a,b}(n) = \underline{m}^{-M}_{-a,-b}(n)$.
Prouvons 2. On décrit les périodes de descente avec la suite croissante de temps d'arrêt suivants : $T_0 = 0$, $T_1 = \inf\{n \leq 0 : M_n > b\}$, $T_2 = \inf\{n \leq T_1 : M_n < a\}$, ..., $T_{2p-1} = \inf\{n \leq T_{2p-2} : M_n > b\}$, $T_{2p} = \inf\{n \leq T_{2p-1} : M_n < a\}$, ...
Pour tout p, $M_{n\wedge T_{2p-1}} - b$ est une sousmartingale positive sur $\{T_{2p-1} \leq n\}$. On a donc
$$\begin{aligned}
&0 \leq \mathbb{E}[(M_{n\wedge T_{2p-1}} - b)\mathbb{I}_{T_{2p-1}\leq n}] \leq \mathbb{E}[(M_{n\wedge T_{2p}} - b)\mathbb{I}_{T_{2p-1}\leq n}] \quad \text{(théorème d'arrêt)}\\
&0 \leq \mathbb{E}[(M_{T_{2p}} - b)\mathbb{I}_{T_{2p}\leq n}] + \mathbb{E}[(M_n - b)\mathbb{I}_{T_{2p-1}\leq n<T_{2p}}]\\
&0 \leq (a-b)\ \mathbb{P}(T_{2p} \leq n) + \mathbb{E}[(M_n - b)^+\mathbb{I}_{T_{2p-1}\leq n<T_{2p}}]
\end{aligned}$$

Par conséquent,
$$(b-a)\sum_p\ \mathbb{P}(\underline{m}^M_{a,b}(n) \leq p) \leq \sum_p \mathbb{E}[(M_n - b)^+\mathbb{I}_{T_{2p-1}\leq n<T_{2p}}]$$

c'est à dire
$$(b-a)\mathbb{E}[\underline{m}^M_{a,b}(n)] \leq \mathbb{E}[(M_n - b)^+].$$

△

Proposition 1.10 *Inégalité de Doob*
Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale (ou sousmartingale positive), $\forall p, q > 1$ tels que $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Alors
$$|| \sup_{n\leq N} |M_n| ||_p \leq q \sup_{n\leq N} ||M_n||_p,$$
où $||.||_p$ est la norme L^p.

Preuve. Il suffit de montrer que si X, Y sont deux v.a. positives telles que $\forall C > 0$
$$C\ \mathbb{P}(Y \geq C) \leq \mathbb{E}[X\mathbb{I}_{Y\geq C}]$$

alors $\forall p, q > 1$ tels que $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

$$||Y||_p \leq q||X||_p.$$

En effet, car si M martingale alors $|M|$ est une sousmartingale positive, il donc suffit d'utiliser le résultat avec $Y = \sup_{n \leq N} |M_n|$ et $X = |M_n|$ (en adaptant la preuve de Doob).
Si f est une fonction positive croissante càd telle que $f(0) = 0$, alors

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \mathbb{E}[X \int_0^Y \frac{1}{z} df(z)]$$

En prenant, $f(y) = y^p$, on obtient le résultat. $\triangle$

1.3 Théorèmes de convergence

Définition 1.11 Une famille de v.a. $(X_i)_{i \in I}$ est dite uniformément intégrable (U.I.) si

$$\lim_{a \to +\infty} \sup_{i \in I} \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{I}_{|X_i| > a}] = 0.$$

Exemple 1.12 Si $\forall i \in I, |X_i| \leq X$ avec $X \in L^1$, la famille $(X_i)_{i \in I}$ est uniformément intégrable.
Si $\exists p \geq 2$, $\sup_{i \in I} \mathbb{E}[|X_i|^p] < \infty$, la famille $(X_i)_{i \in I}$ est uniformément intégrable.

Théorème 1.13 Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. et $X \in L^1$.

$$X_n \xrightarrow{L^1} X \quad \text{ssi} \quad X_n \xrightarrow{\text{proba}} X \text{ et } (X_n)_{n \geq 0} \text{ U.I.}$$

Convergence p.s.

Théorème 1.14 Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une sousmartingale à valeurs dans $I\!R$ telle que $\sup_n \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$, alors il existe $M_\infty \in L^1$ telle que

$$M_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M_\infty$$

Preuve. Le nombre de descentes vérifie $\mathbb{E}[\underline{m}_{a,b}^M(I\!N)] < \infty$, donc $\underline{m}_{a,b}^M(I\!N) < \infty$ p.s.
Soit N l'ensemble de mesure sur lequel $\underline{m}_{a,b}^M(\infty) = \infty$ pour tout $a, b \in \mathbb{Q}$. Soit $\omega \notin N$. Si $M_t(\omega)$ ne converge pas, alors il existe $a, b \in \mathbb{Q}$:

$$\liminf M_t(\omega) < a < b < \limsup M_t(\omega).$$

Contradiction, donc la martingale converge p.s.. Notons M_∞ sa limite.
Par ailleurs, comme $|M_n| = 2M_n^+ - M_n$ et $-M$ est une surmartingale, on a

$$\mathbb{E}[|M_n|] \leq 2\mathbb{E}[M_n^+] - \mathbb{E}[M_0]$$

Donc $\sup_n \mathbb{E}[|M_n|] < \infty$. D'après le lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}[|M_\infty|] \leq \liminf \mathbb{E}[|M_n|] \leq \sup_n \mathbb{E}[|M_n|] < \infty.$$

Donc $M_\infty \in L^1$. $\triangle$

Convergence en moyenne

Théorème 1.15 Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

1. $\exists Z \in L^1$ tel que $\forall n \in I\!N$ $M_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n]$,
2. $(M_n)_{n\geq 0}$ est U.I.,
3. $(M_n)_{n\geq 0}$ converge dans L^1.

On a alors $Z = M_\infty$, la martingale est dite *fermée*, i.e. $(M_n)_{n\in\overline{I\!N}}$ est une martingale.

Preuve.
<u>1 ⇒ 2</u> : Par Jensen

$$\mathbb{E}[|M_n|\mathbb{I}_{|M_n|>a}] \leq \mathbb{E}[|Z|\mathbb{I}_{|M_n|>a}].$$

Par ailleurs, en utilisant l'inégalité de Markov

$$I\!P(|M_n| > a) \leq \frac{\mathbb{E}[|Z|]}{a}.$$

Comme $Z \in L^1$, $\lim_{a\to+\infty} \sup_{n\leq 0} \mathbb{E}[|M_n|\mathbb{I}_{|M_i|>a}] = 0$.

<u>2 ⇒ 3</u> : d'après le théorème précédent, on a M_n converge p.s. vers M_∞, donc converge dans L^1 car U.I.

<u>3 ⇒ 1</u> : On a $M_n = \mathbb{E}[M_{n+p}|\mathcal{F}_n]$ pour tout $p \geq 0$. Comme l'espérance conditionnelle est continue sur L^1, en faisant tendre $p \to +\infty$, d'où le résultat.

$\triangle$

Corollaire 1.16 Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une surmartingale positive, alors $(M_n)_{n\geq 0}$ converge p.s. et dans L^1 vers M_∞ et $(M_n)_{n\in\overline{I\!N}}$ est une surmartingale.

Corollaire 1.17 Soit (M_n) une sousmartingale indexée par $-I\!N$ ou $\mathbb{Z}$, i.e. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ et $M_n = \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ pour $n \leq 0$.
Alors M_n converge quand $n \to -\infty$ p.s. et dans L^1. Par conséquent, $(M_n)_{n\in\overline{-I\!N}}$ sous martingale.

Preuve. En effet, pour tout $n \leq 0$, $\mathbb{E}[(X_n - b)^+] \leq \mathbb{E}[(X_0 - b)^+] < \infty$. Il y a donc convergence p.s. Par ailleurs, $M_n = \mathbb{E}[M_0|\mathcal{F}_n]$ pour tout $n \leq 0$. La martingale est donc U.I. $\triangle$

2 Processus en temps continu

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ I\!P)$ un espace probabilisé filtré.

Définition 2.1 Soit $X = (X_t, t \geq 0)$ un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ I\!P)$.
Le processus X est dit *mesurable* si l'application

$$\begin{array}{rcl} X : [0,\infty[\times\Omega & \longrightarrow & E \\ (t,\omega) & \mapsto & X_t(\omega) \end{array}$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,\infty[) \otimes \mathcal{F}$.
Le processus X est dit *adapté* si $\forall t \geq 0$ X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
Le processus X est dit *progressivement mesurable (ou progressif)* si $\forall t \geq 0$ l'application

$$\begin{array}{rcl} X : [0,t] \times \Omega & \longrightarrow & E \\ (s,\omega) & \mapsto & X_s(\omega) \end{array}$$

est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

Définition 2.2 Soit $X = (X_t, t \geq 0)$ un processus. La *filtration naturelle* de X est définie par $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$.

Remarque 2.3
1. Si $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle de X alors X est adapté à $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$.
2. Un processus progressif est adapté (la réciproque est fausse).
3. Un processus mesurable et adapté admet une version progressivement mesurable (preuve compliquée, voir Meyer, *Probability and Potentials*, p. 68, 1966).

Exemple 2.4
1. Considérons une suite de temps $0 < t_1 < \ldots < t_n$, et $Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}$ des v.a. telles que $\forall i$ Y_{t_i} est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable. On pose $t_0 = 0$ et $t_{n+1} = +\infty$.
   On définit le processus X par : $X_t = Y_{t_i}$ pour $t \in [t_i, t_{i+1}[$. Alors X est progressivement mesurable.
2. Si la filtration est complète, un processus X adapté dont les trajectoires sont continues à gauche (càg) est progessivement mesurable.

Preuve.
1. Soit $B \in \mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ tribu sur E.
   $$\{(t,\omega) : X_t(\omega) \in B\} = \bigcup_{i=0}^{n} [t_i, t_{i+1}[\times \{\omega \in \Omega : Y_{t_i}(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}([0,+\infty[) \otimes \mathcal{F}.$$
   Donc X est mesurable et en regardant la restriction à $[0,t]$ on montre qu'il est progressivement mesurable.
2. On approche le processus X par $X_t^n = X_{k2^{-n}}$ sur $t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$, $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$. Le processus X^n est progressivement mesurable et comme X est càg, $\forall t \geq 0$, p.s. $X_t^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X_t$. Donc X est progressif.

$\triangle$

Proposition 2.5 Soit X un processus adapté et continu à droite (càd) alors X est progressif.

Preuve. On définit $X_t^n = X_{(k+1)2^{-n}}$ sur $t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$. Le processus X^n est $(\mathcal{F}_{t+2^{-n}})_{t\geq 0}$-progressif et comme X est càd $\forall t \geq 0$, p.s. $X_t^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X_t$. Donc X est $(\mathcal{F}_{t+2^{-n}})_{t\geq 0}$-progressif.

On fixe $t \geq 0$ et on définit maintenant $\tilde{X}_s^n = X_s \mathbb{I}_{s<t-2^{-n}} + X_t \mathbb{I}_{s=t}$. Ce processus est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$. Par ailleurs, quand $n \to +\infty$, $X_s^n \longrightarrow X_s$ pour $s \leq t$. Donc la restriction de X à $[0,t]$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$, i.e. X est progressif. $\triangle$

Proposition 2.6 Soit X un processus progressif et T un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt. Alors $X_T \mathbb{I}_{\{T<\infty\}}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Preuve. Supposons T fini. On fixe $t \geq 0$, $X_{|[0,t]}$ est $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-mesurable et $T \mathbb{I}_{\{T\leq t\}}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Par composition, $X_T \mathbb{I}_{\{T\leq t\}}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Donc X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable. $\triangle$

Remarque 2.7 On pose $T = \mathbb{R}^+$. Quand on parle de loi d'un processus ou d'indépendance de processus, il faut voir un processus comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^T$ muni de sa tribu produit (ou tribu de Kolmogorov) $\mathcal{B}^{\otimes T}$. La tribu $\mathcal{B}^{\otimes T}$ est la plus petite tribu qui rend les projections $p_t : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ mesurables. Il existe une unique mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^{\otimes T})$ "compatible" avec les lois finies dimensionnelles du processus (Théorème de Kolmogorov).

Propriété 2.8 Les lois finis dimensionnelles caractérisent la loi d'un processus.

3 Martingales en temps continu

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré.

3.1 Definition et exemples

Définition 3.1 Soit M un processus adapté avec $\forall t \geq 0$, $M_t \in L^1$. On dit que

- M est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-*sousmartingale* si $M_t \leq \mathbb{E}[X_{t+s}|\mathcal{F}_t]$ pour tout $t, s \geq 0$.
- M est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-*surmartingale* si $M_t \geq \mathbb{E}[M_{t+s}|\mathcal{F}_t]$ pour tout $t, s \geq 0$.
- M est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-*martingale* si $M_t = \mathbb{E}[M_{t+s}|\mathcal{F}_t]$ pour tout $t, s \geq 0$.

Exemple 3.2 *Exemple important de Martingale.*
Soit $Z \in L^1$ une variable aléatoire. Alors $M = (M_t, t \geq 0)$ avec $M_t = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t]$ est une martingale.

Exemple 3.3 Soir B un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle.

1. B est une $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-martingale.
2. $(B_t^2 - t, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-martingale.
3. $(\exp(aB_t - \frac{a^2}{2}t), t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-martingale, pour $a \in \mathbb{R}$. Elle est appelée *martingale exponentielle.*

Exemple 3.4 Si X est un processus à accroissement indépendants avec $X_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. Alors $(X_t - \mathbb{E}[X_t], t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.

Remarque 3.5 Soit M et N deux martingales indépendantes telles que $\forall t \geq 0$ $M_t, N_t \in L^2$. On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de (M, N).
Alors $MN = (M_t N_t, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.

Si on a juste M_t et N_t indépendantes pour tout $t \geq 0$, le résultat est faux en général.

Preuve. Par Cauchy-Schwartz, on a bien $\forall t \geq 0$ $M_t N_t \in L^1$.
Soient $t, s \geq 0$ et $Y \in \mathcal{F}_t$ telle que $Y = Y^1 Y^2$ avec $Y^1 \in \sigma(M_s, s \leq t)$ et $Y^2 \in \sigma(N_s, s \leq t)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{t+s}N_{t+s}Y] &= \mathbb{E}[M_{t+s}Y^1]\mathbb{E}[N_{t+s}Y^2] \quad \text{par indépendance} \\
&= \mathbb{E}[M_t Y^1]\mathbb{E}[N_t Y^2] \quad \text{car } M \text{ et} N \text{ martingales} \\
&= \mathbb{E}[M_t N_t Y] \quad \text{par indépendance.}
\end{aligned}$$

Soit $E = \{Y \in L^\infty(\mathcal{F}_t) : \mathbb{E}[M_{t+s}N_{t+s}Y] = \mathbb{E}[M_t N_t Y]\}$. C'est un espace vectoriel qui contient les constantes et stable par convergence monotone. Comme les variables de la forme $Y^1 Y^2$ avec $Y^1 \in \sigma(M_s, s \leq t)$ et $Y^2 \in \sigma(N_s, s \leq t)$ engendrent $L^\infty(\mathcal{F}_t)$, on conclut avec le théorème de la classe monotone. $\triangle$

3.2 Premières propriétés

On note $D = \cup_n D_n$ l'ensemble des dyadiques, avec $D_n = \{k2^{-n}, k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. On a $D_n \subset D_{n+1}$ et D est dénombrable dense dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3.6 *Inégalité Maximale*
Soit M une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale. Alors pour tout $C > 0$

$$P(\sup_{s\in[0,t]\cap D} M_s \geq C) \leq \frac{1}{C} \sup_{0\leq s\leq t} \mathbb{E}[|M_s|].$$

Si de plus M a des trajectoires càd,

$$P(\sup_{s\in[0,t]} M_s \geq C) \leq \frac{1}{C} \sup_{0\leq s\leq t} \mathbb{E}[|M_s|].$$

Preuve. On utilise l'inégalité Maximale pour des martingales discrètes. On a

$$P(\sup_{s\in[0,t]\cap D_n} M_s \geq C) \leq \frac{1}{C} \sup_{s\in[0,t]\cap D_n} \mathbb{E}[|M_s|] \leq \frac{1}{C} \sup_{0\leq s\leq t} \mathbb{E}[|M_s|]$$

On obtient le résultat par convergence monotone quand $n \to +\infty$.
Par ailleurs, lorsque M est càd $\sup_{s\in[0,t]\cap D} M_s = \sup_{s\in[0,t]} M_s$. △

Proposition 3.7 *Inégalité de Doob*
Soit M une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale (ou sousmartingale positive), $p, q > 1$ tels que $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Alors

$$|| \sup_{s\in[0,t]\cap D} |M_s| ||_p \leq q \sup_{s\in[0,t]} ||M_s||_p.$$

Si de plus M a des trajectoires càd,

$$|| \sup_{s\in[0,t]} |M_s| ||_p \leq q \sup_{s\in[0,t]} ||M_s||_p.$$

Théorème 3.8 *Régularisation de surmartingales*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, avec $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant aux conditions habituelles (i.e. complète et continue à droite).
Soit M une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-surmartingale telle que $t \mapsto \mathbb{E}[M_t]$ soit càd. Alors il existe une version $\tilde{M}$ de M telle que

i) p.s. $t \mapsto \tilde{M}_t$ est continue à droite avec des limites à gauche (càdlàg)
ii) $\tilde{M}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-surmartingale.

Remarque 3.9 Si M est une sousmartingale, alors $-M$ est une surmartingale !

Preuve. On considère un ensemble dénombrable dense D de $[0, +\infty[$. On va montrer le lemme suivant

Lemme 3.10 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et M une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-surmartingale. Alors avec probabilité 1 on a

$i)$ $\forall t \geq 0$ $M_{t^+} = \lim_{s\searrow t, s\in D} M_s$ existe, ainsi que $M_{t^-} = \lim_{s\nearrow t, s\in D} M_s$,

$ii)$ $\forall t \geq 0$ $M_t \geq \mathbb{E}[M_{t^+}|\mathcal{F}_t]$, avec égalité dès que la fonction $s \mapsto \mathbb{E}[M_s]$ est continue à droite (ce qui est le cas des martingales car l'espérance est constante). En particulier, on a $M_{t^+} \in L^1$.

$iii)$ $(M_{t^+}, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$ surmartingale.

En effet, pour prouver le théorème à partir du lemme, il suffit juste de définir $\tilde{M}_t = \lim_{s\searrow t, s\in D} M_s$.
C'est bien une version de M, car si l'espérance est càd et la filtration est càd, on a sur D

$$M_t = \mathbb{E}[\tilde{M}_t|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\tilde{M}_t|\mathcal{F}_{t^+}] = \tilde{M}_t$$

car $\tilde{M}_t$ est $\mathcal{F}_{t^+}$-mesurable. De plus, $\tilde{M}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ surmartingale càdlàg.

Preuve du Lemme.

$i)$ Existence de limites à gauche et à droite

D'après l'inégalité maximale, pour $N \in \mathbb{N}$ on a $\sup_{s\in[0,N]\cap D} |M_s| < \infty$. Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ et $\overline{m}^M_{a,b}(t)$ le nombre de montées de M le long de D de a à b avant l'instant t. En tuilisant le résultat sur les surmartingales à temps discrèt, on obtient

$$\mathbb{E}[m^M_{a,b}(t)] \leq \frac{1}{b-a} \sup_{0\leq s\leq t} \mathbb{E}[|M_s - a|].$$

En particulier, $m^M_{a,b}(t) < \infty$ p.s. En utilisant la même démonstration que cele du Théorème 1.14, on obtient que p.s. M admet des limites à gauche et à droite en tout $t \geq 0$ le long de D.

ii) Montrons que $\forall t \geq 0$ $M_t \geq \mathbb{E}[M_{t^+}|\mathcal{F}_t]$.

Soit $t \geq 0$ fixé et (t_n) une suite décroissante de D qui converge vers t. On a $M_{t_n} \to M_{t^+}$ p.s. On note $\mathcal{G}_p = \mathcal{F}_{t_{-p}}$ et $N_p = M_{t_{-p}}$ pour $p \leq 0$. Alors N est une $(\mathcal{G}_p)_{p\leq 0}$-surmartingale sur $-\mathbb{N}$. Donc elle converge dans L^1 d'après le Corrolaire 1.17. Donc $M_{t_n} \to M_{t^+}$ dans L^1, d'où $X_{t^+} \in L^1$ et $M_t \geq \mathbb{E}[M_{t_n}|\mathcal{F}_t]$ et par passage à la limite $M_t \geq \mathbb{E}[M_{t^+}|\mathcal{F}_t]$ p.s.
On a égalité si l'espérance est continue à droite, car alors

$$\mathbb{E}[M_t] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[M_{t_n}] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{t_n}|\mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[M_{t^+}].$$

iii) $(M_{t^+}, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$ surmartingale.

Comme M_{t_n} est $\mathcal{F}_{t_n}$ mesurable, M_{t^+} est $\mathcal{F}_{t^+}$ mesurable. Soit $t, s \geq 0$, il existe $(u_n)_n$ suite de décroissante de D convergeant vers $t+s$. Soit $0 < \varepsilon < s$ fixé. Alors

$$\mathbb{E}[M_{(t+s)^+}|\mathcal{F}_{t+\varepsilon}] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[M_{u_n}|\mathcal{F}_{t+\varepsilon}] \leq M_{t+\varepsilon}$$

On choisir alors $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ décroissante vers 0 telle que $t+\varepsilon_n \in D$. en utilisant encore le Corrolaire 1.17, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[M_{(t+s)^+}|\mathcal{F}_{t+\varepsilon_n}] = \mathbb{E}[M_{(t+s)^+}|\bigcap_{n\geq 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon_n}] = \mathbb{E}[M_{(t+s)^+}|\mathcal{F}_{t^+}] \quad \text{p.s. et dans } L^1.$$

Comme $M_{t+\varepsilon_n} \to M_{t^+}$ p.s., le résultat est prouvé. △

3.3 Convergence des martingales continues

Théorème 3.11 Soit M une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale continue à droite. On suppose que M est bornée dans L^1, i.e. $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|M_t|] < \infty$.
Alors M_t converge p.s. quand $t \to +\infty$. On note M_∞ sa limite. On a de plus $M_\infty \in L^1$.

Remarque 3.12 En général la convergence n'a pas lieu dans L^1.

Preuve. Pour tout $a < b$ le nombre de montée de a à b le long des dyadiques est fini p.s. car

$$\mathbb{E}[m^M_{a,b}(t)] \leq \frac{1}{b-a} \sup_{s\leq t} E[(M_s - b)^+].$$

On fait tendre $t \to +\infty$ et donc $\mathbb{E}[m^M_{a,b}(\infty)] < \infty$. La suite de la preuve est la même que dans le cas discret. △

Définition 3.13 On dit qu'un processus X est *uniformément intégrable* si

$$\lim_{a\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X_t|\mathbb{I}_{|X_t|>a}] = 0.$$

On dit qu'une martingale M est *fermée* s'il existe une v.a. $Z \in L^1$ telle que

$$\forall t \geq 0 \quad M_t = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t] \quad \text{p.s.}.$$

Théorème 3.14 Soir M une martingale càd. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

1. M est une martingale fermée,
2. M est uniformément intégrable,
3. il existe $M_\infty \in L^1$ telle que $\lim_{t\to+\infty} M_t = M_\infty$ p.s. et dans L^1.

On a alors que p.s. $M_t = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_t]$.

Preuve. Même preuve que dans le cas discret. △

3.4 Théorème d'arrêt

Théorème 3.15 Soit M une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale càd fermée. On note M_∞ sa limite. Soit T un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt. On pose $M_T = M_\infty$ sur $\{T = \infty\}$.
Alors $\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_T] = M_T$ p.s. et le processus arrêté $M^T = (M_{T\wedge t}, t \geq 0)$ est encore une martingale uniformément intégrable de valeur terminale M_T.
En particulier, $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_\infty]$.

Preuve.

i) T déterministe.

Évident.

ii) T temps d'arrêt simple.

On note $t_0, t_1, \ldots$ les valeurs prises par T. On a $M_T = M_{t_n}$ sur $\{T = t_n\}$. Par ailleurs, M_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable car M est càd, d'où progressivement mesurable.
Soit $\Lambda \in \mathcal{F}_T$. Par Fubini, on a

$$\mathbb{E}[M_\infty \mathbb{I}_\Lambda] = \sum_n \mathbb{E}[M_\infty \mathbb{I}_\Lambda \mathbb{I}_{T=t_n}] = \sum_n \mathbb{E}[M_{t_n} \mathbb{I}_\Lambda \mathbb{I}_{T=t_n}] = \mathbb{E}[M_T \mathbb{I}_\Lambda]$$

Donc $\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_T] = M_T$.

ii) Cas général.

Il existe une suite décroissante de t.a. simples T^n qui converge p.s. vers T.
On a $\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_{T^n}] = M_{T^n}$, d'où $\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_T] = \mathbb{E}[M_{T^n}|\mathcal{F}_T]$ (en effet $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T_n}$).
Par ailleurs, M_{T_n} converge vers M_T, car les trajectoires sont càd. Montrons que cette convergence a lieu dans L^1.
Notons pour $p \leq 0$ $\mathcal{G}_p = \mathcal{F}_{T^{-p}}$. On a $\mathcal{G}_p \subset \mathcal{G}_{p+1}$.
Notons $N_p = M_{T^{-p}}$. Alors N est une $(\mathcal{G}_p)_{p\leq 0}$-martingale indexée par $-\mathbb{N}$ (car la suite de t.a. est décroissante). Elle converge donc dans L^1 d'après le Corollaire 1.17.
Par conséquent, M_{T_n} converge vers M_T dans L^1 et donc $\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_T] = M_T$. △

Remarque 3.16 Sous les hypothèses du théorème, on a $\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_t] = M_{t\wedge T}$.

Remarque 3.17
1. Le théorème s'applique aux martingales càd bornées.
2. Si T est borné, il suffit de supposer la martingale M càd. (En effet, si $T \leq 1$, $M_t = \mathbb{E}[M_1|\mathcal{F}_t]$ donc fermée sur l'intervalle de temps $[0, 1]$.)

Attention : Le théorème ne s'applique que lorsque la martingale est fermée ou le temps d'arrêt borné. En effet si B est un mouvement brownien (c'est bien une martingale), en posant $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$, on a $B_{T_a} = a$ et $\mathbb{E}[B_0] = 0 \neq a = \mathbb{E}[B_{T_a}]$ pour $a > 0$.

Corollaire 3.18 Si T et S sont deux t.a. bornés avec $S \leq T$ et M une martingale càd, alors

$$\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_S] = M_S.$$

4 Processus de Poisson

Le processus de Poisson est notamment utilisé pour modéliser les files d'attente comme par exemple les arrivées des coups de téléphone à un central téléphonique.

Définition 4.1 soit $\lambda > 0$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $T_n = S_1 + \ldots + S_n$. On définit alors le processus de comptage $N = (N_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{I}_{\{T_n \leq t\}}.$$

Ce processus est appelé *processus de Poisson d'intensité* λ.

Définition 4.2 On définit $(\mathcal{F}_t^N)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle complétée du processus de Poisson.

Remarque 4.3 On peut aussi écrire le processus sous la forme

$$N_t = \sup\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

Inversement, on remarque que T_n est un $(\mathcal{F}_t^N)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt,

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : N_t = n\}.$$

Si $t > s$, on a

$$N_t - N_s = \sum_{n\geq 1} \mathbb{I}_{\{s<T_n\leq t\}}.$$

Théorème 4.4 Un processus X à accroisssements indépendants et stationnaires (PAIS) càd vérifie la propriété de Markov forte.

Preuve. Voir Chapitre 2, Théorème 2.10. △

Définition 4.5 *Équivalente du Processus de Poisson.*
Un *processus de Poisson* $N = (N_t, t \geq 0)$ d'intensité λ est un processus de comptage càd tel que

i) $N(0) = 0$
ii) N est un processus à accroisssements indépendants et stationnaires.
iii) pour tout $t \geq 0$, $N(t)$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.

Preuve.
$\Rightarrow\rfloor$ Soit N un processus de Poisson au sens de la Définition 4.1. On a bien $N(0) = 0$. Soient $0 \leq t-1 < t_2 < \ldots < t-n$, alors $N(t+s) - N(t) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{I}_{\{t<T_n\leq t+s\}}$. Comme

$$\{N_t = k\} \quad = \quad \{S_1 + \ldots + S_k \leq t < S_1 + \ldots + S_{k+1}\}$$

si $k_1, \ldots, k_n \in I\!N$, en posant $K_i = k_1 + \ldots + k_i$ on a alors

$$\begin{aligned}
&I\!P(N_{t_1} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n) \\
&= \quad I\!P(N_{t_1} = k_1, N_{t_2} = k_2 + k_1, \ldots, N_{t_n} = K_n) \\
&= \quad I\!P(S_1 + \ldots + S_{K_1} \leq t_1 < S_1 + \ldots + S_{K_1+1}, S_1 + \ldots + S_{K_2} \leq t_2 < \\
&\qquad S_1 + \ldots + S_{K_2+1}, \ldots, S_1 + \ldots + S_{K_n} \leq t_n < S_1 + \ldots + S_{K_n+1}) \\
&= \quad \int \cdots \int_{I\!R+} \lambda^{K_n+1} e^{-\sum_{i=1}^{K_n+1} s_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{S_1+\ldots+S_{K_i}\leq t_i<S_1+\ldots+S_{K_i+1}\}} ds_1 \ldots ds_{K_n+1}
\end{aligned}$$

On conclut après quelques calculs horribles....(voir par exemple [2])
Vérifions maintenant que $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$. Comme T_n suit la loi Gamma(n, λ), pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
I\!P(N_t = n) \quad &= \quad I\!P(T_n \leq t) - I\!P(T_{n+1} \leq t) \\
&= \quad \int_0^t e^{-\lambda s} \left(\frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} - \frac{\lambda^{n+1}}{n!} s^n \right) ds \\
&= \quad e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Pour $n = 0$, $I\!P(N_t = n) = I\!P(S_1 > t) = e^{-\lambda t}$.
$\lfloor\Leftarrow$ Soit N un processus de Poisson au sens de la Définition 4.5. Un tel processus vérifie la propriété de Markov forte.
Posons $T_n = \inf\{t \geq 0 : N_t = n\}$. Pour tout $n \geq 0$, $T_n < \infty$ p.s. car pour tout $t \geq 0$ $N(t)$ suit la loi de Poisson$\mathcal{P}(\lambda t)$. On définit $S_1 = T_1$ et $S_{n+1} = T_{n+1} - T_n$.

Montrons que S_1 suit la loi exponentielle :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_1 > t+s) &= \mathbb{P}(N_{t+s} = 0) = \mathbb{P}(N_t = 0, N_{t+s} = 0) \\
&= \mathbb{P}(N_t = 0)\ \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = 0) = \mathbb{P}(N_t = 0)\ \mathbb{P}(N_s = 0) \\
\mathbb{P}(S_1 > t+s) &= \mathbb{P}(S_1 > t)\ \mathbb{P}(S_1 > s) \quad \text{cqfd.}
\end{aligned}$$

Comme T_n est un $(\mathcal{F}_t^N)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt, les variables $S_i = T_i - T_{i-1}$ sont $\mathcal{F}_{T_n}^N$-mesurable, pour $i \leq n$. Montrons que S_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_{T_n}^N$ et à même loi que S_1.

On remarque que $T_{n+1} = \inf\{t \geq T_n : N_t = n+1\} \overset{Loi}{=} T_n + \inf\{t \geq 0 : \tilde{N}_t = 1\}$ où $\tilde{N}$ est un processus de Poisson indépendant de $\mathcal{F}_{T_n}^N$ car N est un PAIS. Par conséquent

$$\mathbb{P}(S_{n+1} > t | \mathcal{F}_{T_n}^N) = \mathbb{P}(T_{n+1} - T_n > t | \mathcal{F}_{T_n}^N) = \mathbb{P}(S_1 > t)$$

△

Théorème 4.6 *Propriété de Markov forte*
Soit N un processus de Poisson.
Soit T un $(\mathcal{F}_t^N)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt fini p.s.. On note N' le processus définit pour $s \geq 0$ par $N'_s = N_{T+s} - N_T$. Alors le processus N' est indépendant de $\mathcal{F}_T^N$ et a même loi que N.

Théorème 4.7 soit N un processus de Poisson d'intensité λ. Alors les processus suivants sont des martingales :

$$i)\quad \tilde{N} = (N_t - \lambda t, t \geq 0),$$

$$ii)\quad ((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t, t \geq 0).$$

$\tilde{N}$ est appelé *processus de Poisson compensé.*

Preuve. On utilise le fait que N un est PAIS (voir les exemples de martingale liés au Brownien).
△

Remarque 4.8 On peut voir le processus de Poisson comme une mesure aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$: la mesure de l'intervalle $[s,t]$ est $N(]s,t]) = N_t - N_s$.

Remarque 4.9 Le mouvement brownien et le processus de Poisson font partie d'une classe plus grande de processus : les *processus de Lévy* (processus càd à accroissements indépendants et stationnaires).

Chapitre 4

Semimartingales et calcul stochastique

Dans une situation déterministe, on intègre une fonction mesurable par rapport à une mesure. Dans la situation aléatoire, on va intégrer des processus progressifs par rapport à des semimartingales (semimartingale=martingale locale + processus à variation finie).

1 Processus à variation bornée

1.1 Notion de variation bornée dans le cadre déterministe, mesure de Stieljes

Soit $T > 0$.

Définition 1.1 On dit qu'une fonction f de $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue avec $f(0) = 0$ est à *variation bornée* ou *finie* s'il existe deux fonctions croissantes F^+, $F^- : [0, T] \to \mathbb{R}$ telles que $f = F^+ - F^-$.

Remarque 1.2 On peut toujours supposer que $F^+(0) = F^-(0) = 0$ et que les fonctions F^+, F^- sont continues.

Preuve. Une fonction croissante admet des limites à gauche et à droite en tout point. Comme f est continue, les sauts ont lieux en même temps et se compensent...on peut donc les "évacuer". $\triangle$

Rapppel : Soit F une fonction croissante càd sur $\mathbb{R}$, alors il existe une unique mesure γ sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ définie par : pour tout $a < b$ $\gamma([a, b]) = F(b) - F(a^-)$. La mesure γ est appelée *mesure de stieljes associée à la fonction* F, notée dF. Par exemple, pour $F(x) = x$ on retrouve la mesure de Lebesgue, pour $F = \mathbb{I}_{[a,+\infty[}$ on retrouve la dirac δ_a.

Une décomposition $f = F^+ - F^-$ n'est pas unique. Cependant, il existe une "décomposition minimale" au sens suivant :

Définition 1.3 Soit f une fonction à variation bornée sur $[0, T]$. Il existe une unique décomposition $f = F^+ - F^-$ où F^+, $F^- : [0, T] \to \mathbb{R}$ croissantes pour laquelle les mesures de stieljes $\gamma^+ = dF^+$ et $\gamma^- = dF^-$ associées à chaque fonction soient étrangères : i.e. il existe deux boréliens B^+ et B^- tels que

i) $\gamma^+(B^+) = \gamma^+([0, T])$ et $\gamma^-(B^-) = \gamma^-([0, T])$,

ii) $\gamma^+(B^-) = \gamma^-(B^+) = 0$.

Preuve.

i) Existence

On considère une décomposition de f : $f = H^+ - H^-$. Alors $H = H^+ + H^-$ est une fonction croissante. On note ν la mesure de stieljes associée à F, $\nu^+ = dH^+$ et $\nu^- = dH^-$.
Pour tout borélien B, on a $\nu(B) \geq \nu^{+/-}(B)$, donc par le théorème de Radon-Nikodyn il existe des fonctions mesurables g^+ et g^- de $[0,T]$ dans $[0,1]$ telles que

$$\nu^+(dt) = g^+(t)\nu(dt) \quad \text{et} \quad \nu^-(dt) = g^-(t)\nu(dt).$$

On pose $g = g^+ - g^-$. On a pour tout $t \in [0,T]$,

$$f(t) = H^+(t) - H^-(t) = \int_{[0,t]} g(s)\nu(ds).$$

On pose $f^+(t) = g(t)\mathbb{I}_{g(t)>0}$, $\tilde{\gamma}^+(dt) = f^+(t)\gamma(dt)$ et $F^+(t) = \int_{[0,t]} d\tilde{\gamma}^+(dt)$.
De même, on pose $f^-(t) = -g(t)\mathbb{I}_{g(t)<0}$, $\tilde{\gamma}^-(dt) = f^-(t)\gamma(dt)$ et $F^-(t) = \int_{[0,t]} d\tilde{\gamma}^-(dt)$.
Les fonction F^+ et F^- sont croissantes, les mesures $\tilde{\gamma}^+$ et $\tilde{\gamma}^-$ sont étrangères (car à supports disjoints) et on a encore

$$f(t) = F^+(t) - F^-(t).$$

ii) Unicité

Soit $f = F^+ - F^-$ avec les mesures de stieljes γ^+ et γ^- associées à chaque fonction étrangères. On définit la mesure signée $\mu = \gamma^+ - \gamma^-$. On remarque que μ ne dépend pas de la décomposition car $\mu([0,t] = f(t)$.
Soit B un borélien de $[0,T]$. On a

$$\begin{aligned} \gamma^+(B) &\geq \gamma^+(B') \quad \text{pour tout borélien } B' \subset B \\ &\geq \mu(B') \quad \text{pour tout borélien } B' \subset B \\ &\geq \sup\{\mu(B'), \forall B' \subset B\} \end{aligned}$$

En fait, on a $\gamma^+(B) = \sup\{\mu(B'), \forall B' \subset B\}$ (les mesures γ^+ et γ^- étant étrangères). Ceci assure l'unicité car μ ne dépend pas de la décomposition. △

Remarque 1.4 Si $f = F^+ - F^-$ est la décomposition canonique et si $f = H^+ - H^-$ une autre décomposition. Alors la fonction $H^+ - F^+ = F^- - H^-$ est croissante.

Preuve. On introduit les mesures de Stieljes ν^+, ν^- des fonctions H^+ et H^-. On pose $\nu = \nu^+ + \nu^-$. Il existe deux fonctions k^+ et k^- à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\nu^+(dt) = k^+(dt)\nu(dt)$ et $\nu^-(dt) = k^-(dt)\nu(dt)$. Alors par unicité de la décomposition canonique, la mesure de Stieljes de F^+ vérifie $\gamma^+ = \mathbb{I}_{k(t)>0}k(t)d\nu(t)$ où $k = k^+ - k^-$.
Par conséquent, $H^+(t) - F^+(t) = \nu^+([0,t]) - \gamma^+([0,t]) \geq 0$. △

Définition 1.5 Soit f une fonction à variation bornée et $f = F^+ - F^-$ sa décomposition canonique. On appelle *variation totale* de f, notée $|df|$ la mesure de stieljes associée à $F^+ + F^-$. Pout toute fonction mesurable h avec $\int |h||df| < \infty$, on définit l'intégrale de h par rapport à la mesure df sur l'intervalle $[0,t]$, notée $\int_{[0,t]} h(s)df(s)$ ou encore $\int_0^t h(s)df(s)$:

$$\int_0^t h(s)df(s) = \int_{[0,t]} h(s)dF^+(s) - \int_{[0,t]} h(s)dF^-(s).$$

Remarque 1.6 1. La fonction $t \mapsto \int_0^t h(s)df(s)$ est à variation bornée et sa décomposition canonique est

$$\left(\int_0^t h^+(s)dF^+(s) + \int_0^t h^-(s)dF^-(s)\right) - \left(\int_0^t h^-(s)dF^+(s) + \int_0^t h^-(s)dF^-(s)\right)$$

où $h^+ = h \vee 0$ et $h^- = h \wedge 0$.

2. *Associativité de l'intégrale* : si f est une fonction à variation bornée et h, g des fonctions mesurables bornées, alors en notant $f'(t) = \int_0^t h(s)df(s)$ on a

$$\int_0^t g(s)df'(s) = \int_0^t g(s)h(s)df(s).$$

On peut faire le lien entre le variation totale de f et sa variation sur les subdivision de $[0, T]$:

Proposition 1.7 Soit une fonction à variation bornée, alors

$$|df|([0,T]) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|\}$$

où le sup est pris sur les subdivisions $\Delta = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ de $[0, T]$.

Preuve. On a pour tout i, $|f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq |df|[t_{i-1} - t_i]$, d'où

$$\sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|\} \leq |df|([0,T]).$$

Il suffit de regarder les suites de subdivisions $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ de $[0, T]$ emboitées ($\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$) de pas $|\Delta_n|$ tendant vers 0. On note $\Delta_n = (t_1^n, \ldots, t_{m_n}^n)$.

On considérons l'espace probabilisé filtré $(\Omega = [0,T], \mathcal{B}([0,T]), (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0},\ \mathbb{P})$, avec $\mathbb{P} = \dfrac{|df|}{|df|([0,T])}$ et $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les intervalles $[t_i^n, t_{i+1}^n]$ $i \in \{1, \ldots, m_n - 1\}$.

On note g la densité de df par rapport à $|df|$, g est à valeurs dans $\{-1, 1\}$. On définit la martingale $M_n = \mathbb{E}[g|\mathcal{F}_n]$. C'est une martingale fermée, donc converge dans L^1 vers M_∞. Comme $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$, $M_\infty = g$. En particulier, $\mathbb{E}[|M_n|] \to \mathbb{E}[|g|] = 1$ quand $n \to +\infty$.

Explicitons la martingale M_n :

$$\begin{aligned} M_n(\omega) &= \mathbb{P}([t_i^n, t_{i+1}^n]) \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s)\ \mathbb{P}(ds) \quad \text{si } \omega \in [t_i^n, t_{i+1}^n] \\ &= \frac{f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)}{|df|([0,T])\ \mathbb{P}([t_i^n, t_{i+1}^n])} \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}[|M_n|] = \frac{\sum_{i=1}^{m_n-1} |f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)|}{|df|([0,T])} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

ce qui achève la preuve. △

1.2 Notion de variation bornée dans le cadre aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré.

Définition 1.8 On dit qu'un processus X est à *variation bornée* s'il est continu, adapté, avec $X_0 = 0$ et si p.s. pour tout $T > 0$ la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est à variation bornée sur $[0, T]$.

On dit qu'un processus X est *croissant* s'il est adapté, avec $X_0 = 0$, à trajectoires croissantes et continues p.s.

Propriété 1.9 Soit H un processus progressivement mesurable et X un processus à variation bornée avec pour presque tout ω :

$$\int_0^t |H_s(\omega)||dX_s(\omega)| < \infty.$$

Alors le processus $H.X$ défini par $(H.X)_t(\omega) = \int_0^t H_s(\omega)dX_s(\omega)$ est un processus à variation bornée.

Remarque 1.10 Associativité de l'intégrale pour les processus à variation bornée : Soient H, K des processus progressivement mesurables et X un processus à variation bornée, on a

$$K.(H.X) = (KH).X$$

Preuve. Comme l'application $(s, \omega) \mapsto H_s(\omega)$ sur $[0, t] \times \Omega$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$, l'intégrale $(H.X)_t(\omega) = \int_0^t H_s(\omega) dX_s(\omega)$ est définie pour presque tout ω.
Par ailleurs, pour presque tout ω, la fonction $t \mapsto (H.X)_t(\omega)$ est à variation bornée.
On doit maintenant montrer que le processus $H.X$ est adapté.
On considère E_t l'espace vectoriel des processus H bornés mesurables par rapport à $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ pour lesquels $(H.X)_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Il contient les constantes et est stable par convergence monotone bornée.
Cet espace contient la classe des processus élémentaires : on considère une subdivision $(t_1, \dots, t_n)$ de $[0, t]$ et des ensemble $A_i \in \mathcal{F}_t$

$$H_s = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{s \leq t_i} \mathbb{I}_{A_i}$$

car $(H.X)_t = \sum_{i=1}^n X_{t_i} \mathbb{I}_{A_i}$ est bien $\mathcal{F}_t$ mesurable. Par ailleurs, cette classe est stable par multiplication.
Donc d'après le théorème de convergence monotone, comme les ensembles $\{s \leq t_i\} \cap A_i$ engendrent la tribu $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$, on obtient le résultat. $\triangle$

Remarque 1.11 Le mouvement brownien n'est pas un processus à variation bornée car il est nul part dérivable. On ne peut donc pas construire de cette manière l'intégrale par rapport au brownien (voir [6] pour plus de détails).

2 Martingales locales et leur crochet

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré avec les conditions habituelles (filtration continue à droite et complète).

Définition 2.1 Un processus M est une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-*martingale locale* s'il existe une suite croissante de $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-temps d'arrêt $(T_n)_{n \geq 0}$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = +\infty$ p.s. telle que

i) M_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable,

ii) pour tout $n \geq 0$, $(M_{t \wedge T_n} - M_0, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-martingale.

La suite de temps d'arrêt est dite *réductrice* pour la martingale locale M.

Remarque 2.2 On n'a pas besoin d'hypothèse d'intégrabilité sur M_0.

Remarque 2.3 Une martingale est une martingale locale, mais la réciproque est évidemment fausse.
Attention il ne faut pas appliquer les théorèmes sur les martingales aux martingales locales avant localisation.

Proposition 2.4 Si M est une martingale locale, il existe une suite de temps d'arrêt bornés $(S_n)_{n \geq 0}$ telle que pour tout $n \geq 0$, $(M_{t \wedge S_n} - M_0, t \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable.

Preuve. Si M martingale locale et $(T_n)_{n \geq 0}$ une suite réductrice de M. Alors $(T_n \wedge n)_{n \geq 0}$ réduit M par le théorème d'arrêt. En posant $S_n = T_n \wedge n$, temps d'arrêt borné, on a par ailleurs, $(M_{t \wedge S_n} - M_0, t \geq 0)$ est une martingale U.I. $\triangle$

Proposition 2.5 Si $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(T_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites réductrices de temps d'arrêt finis p.s. de M, alors $(S_n \wedge T_n)_{n\geq 0}$ réduit également M.
Par ailleurs, quand M est une martingale locale continue, on peut toujours prendre

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t - M_0| = n\}.$$

Preuve. Le premier résultat est dû au théorème d'arrêt.
On pose $T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t - M_0| = n\}$ et on considère $(S_n)_{n\geq 0}$ réductrice de M.
On peut supposer $M_0 = 0$ sans perte de généralité. Comme $(M_{t\wedge S_k}, t \geq 0)$ est une martingale et $T_n \wedge m$ temps d'arrêt borné, par le théorème d'arrêt, on a

$$\mathbb{E}[M_{T_n\wedge m\wedge S_k}|\mathcal{F}_t] = M_{T_n\wedge m\wedge S_k\wedge t}$$

On fait tendre k et m vers $+\infty$, $M_{T_n\wedge m\wedge S_k\wedge t} \to M_{T_n\wedge t}$ et par convergence dominée, $\mathbb{E}[M_{T_n\wedge S_k\wedge m}|\mathcal{F}_t] \to \mathbb{E}[M_{T_n}|\mathcal{F}_t]$. Donc $\mathbb{E}[M_{T_n}|\mathcal{F}_t] = M_{T_n\wedge t}$ p.s. Donc $(T_n)_{n\geq 0}$ réduit M et par continuité des trajectoires $(T_n)_{n\geq 0}$ croît vers $+\infty$. $\triangle$

Proposition 2.6 Soit M une martingale locale.

1. Si $M_0 \in L^1$ et si pour tout $t \geq 0$, $M_t \geq 0$ alors M est une surmartingale.
2. S'il existe $A \in L^1$ tel que $\forall t \geq 0$ $|M_t| \leq A$, alors M est une martingale uniformément intégrable.

Remarque 2.7 Si M est une martingale locale uniformément intégrable, en général M n'est pas une martingale (cf [3] example 2.13 p182)

Preuve.

1. Soit (T_n) une suite réductrice de M. On peut supposer $M_0 = 0$ sans perte de généralité. On a pour $t \geq s$, $\mathbb{E}[M_{T_n\wedge t}|\mathcal{F}_s] = M_{T_n\wedge s}$. On fait tendre $n \to +\infty$ et on applique le lemme de Fatou.
2. On utilise la même raisonnement, en appliquant le théorème de convergence dominée.

$\triangle$

On ne travaillera désormais qu'avec des <u>martingales locales continues</u>.

On va maintenant comparer les martingales locales et les processus à variation bornée.

Proposition 2.8 Soit M une martingale locale continue, nulle en 0. Si M est à variation bornée, alors $M \equiv 0$.

Remarque 2.9 Si $M_0 \neq 0$, il suffit de considérer la martingale locale $M - M_0$ et on obtient $M \equiv M_0$.

Preuve. On considère la suite $T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| = n\}$ de réducteurs de M et on définit $S_k = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t |dM_s| = k\}$. M^{T_n} est une martingale bornée.
Alors par le théorème d'arrêt $(M_{t\wedge T_n\wedge S_k}, t \geq 0)$ est une martingale bornée à variation bornée. Il suffit donc de montrer le résultat pour les martingales bornées à variation bornée de variation totale majoré par k.

Soit $\Delta = \{t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_p = t\}$ une subdivision de $[0,t]$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t^2] &= E\left[\sum_{i=0}^{p-1}(M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2)\right] \\
&= E\left[\sum_{i=0}^{p-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\right] \qquad \text{car martingale} \\
&\leq E\left[\sup_{i=0,\ldots,p-1}|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\sum_{i=0}^{p-1}|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\right] \\
&\leq E\left[\sup_{i=0,\ldots,p-1}|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\sum_{i=0}^{p-1}|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\right] \\
&\leq E\left[\sup_{i=0,\ldots,p-1}|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\int_0^t |dM_s|\right] \\
&\leq kE\left[\sup_{i=0,\ldots,p-1}|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\right]
\end{aligned}$$

Comme M est uniformément continue sur $[0,t]$, par convergence dominée le terme de droite converge vers 0 quand le pas de la subdivision tend vers 0. Donc pour $t > 0$ $\mathbb{E}[M_t^2] = 0$, d'où $M_t = 0$ p.s.. Comme M est continue, p.s. $\forall t \geq 0$ $M_t = 0$. $\triangle$

Définition 2.10 Un processus X est dit *à variation quadratique finie* si pour tout $t \geq 0$ la limite en proba de $\sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ sur les subdivisions $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t)$ de $[0,t]$ quand le pas $|\Delta|$ tend vers 0 est finie. On note

$$< X >_t = \lim \sum_{i=0}^{k-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

aussi noté $< X, X >_t$, et $< X >$ est appelée *crochet* ou *variation quadratique* de M.

Remarque 2.11 $< X >_t = \sup \sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ où le sup est pris sur les subdivisions $\Delta = (t_1, \ldots, t_n)$ de $[0,t]$.
Si $H \in L^\infty$ et X à variation quadratique finie, alors $H + X$ et HX sont à variation quadratique finie : $< H + X > = < X >$ et $< HX > = H^2 < X >$.

Théorème 2.12 Soit M une martingale locale continue. Alors M est à variation quadratique finie et $< M >$ est l'unique processus croissant tel que $M^2 - < M >$ soit une martingale locale.

Exemple 2.13 Si $M = B$ le mouvement brownien, alors $< B >_t = t$.

Preuve.

i) Unicité

Soient A et B deux processus à croissant tels que $M^2 - A$ et $M^2 - B$ soient des martingales locales. Alors par différence $A - B$ est une martingale locale à variation bornée, donc $A = B$.

ii) Existence de $< M >$

Il suffit de montrer l'existence pour les martingales continues bornées nulle en 0. En effet, il suffit de réduire la martingale locale par $T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t - M_0| = n\}$. Notons K la borne de M.
Pour $t_i \leq s < t_{i+1}$, on remarque que

$$\mathbb{E}[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(M_{t_{i+1}} - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] + (M_s - M_{t_i})^2.$$

Soit $\Delta = (t_1, \ldots, t_n, \ldots)$ une subdivision de $\mathbb{R}^+$ sans point d'accumulation. Pour $t \geq 0$, il existe k tel que $t_k \leq t < t_{k+1}$. On note alors $V_t^\Delta(M)$ (ou juste V_t^Δ si pas d'ambiguité sur la martingale)

$$V_t^\Delta(M) = \sum_{i=1}^{k-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + (M_t - M_{t_k})^2 \tag{2.1}$$

En utilisant cette notation, pour $s \leq t$, il existe $n \leq k$ tels que

$$V_t^\Delta - V_s^\Delta = \sum_{i=n}^{k-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + (M_{t_{n+1}} - M_{t_n})^2 + (M_t - M_{t_k})^2 + (M_s - M_{t_n})^2.$$

Par conséquent, comme M est une martingale,

$$\mathbb{E}[V_t^\Delta - V_s^\Delta | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s] \tag{2.2}$$

En effet, si $k = n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_t^\Delta - V_s^\Delta | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(M_t - M_{t_n})^2 - (M_s - M_{t_n})^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] + (M_s - M_{t_n})^2 - (M_s - M_{t_n})^2. \end{aligned}$$

Si $k = n + 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_t^\Delta - V_s^\Delta | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(M_t - M_{t_{n+1}})^2 + (M_{t_{n+1}} - M_{t_n})^2 - (M_s - M_{t_n})^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(M_t - M_{t_{n+1}})^2 | \mathcal{F}_{t_{n+1}}] | \mathcal{F}_s] \\ &\quad + \mathbb{E}[(M_{t_{n+1}} - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] + (M_s - M_{t_n})^2 - (M_s - M_{t_n})^2 \\ &= \mathbb{E}[M_t^2 | \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[M_{t_{n+1}}^2 | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[M_{t_{n+1}}^2 | \mathcal{F}_s] - M_s^2 \end{aligned}$$

Par itération, on a le résultat quelque soit $k \geq n$.
Par conséquent $(M_t^2 - V_t^\Delta, t \geq 0)$ est une martingale. On fixe maintenant $t \geq 0$. On veut montrer que $< M >_t$ existe.
Considérons une suite (Δ_n) de subdivisions emboitées de $[0, t]$ ($\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$) dont le pas tend vers 0. Soit $1 \leq n \leq p$, on a $\Delta_n \subset \Delta_p$. Le processus $X = (V_s^{\Delta_n} - V_s^{\Delta_p}, s \leq t)$ est une martingale d'après ce qui précède et en réutilisant (2.2) avec X au lieu de M et comme $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$, on a

$$\mathbb{E}[(V_t^{\Delta_n} - V_t^{\Delta_p})^2] = \mathbb{E}[V_t^{\Delta_p}(X)] \leq 2(\mathbb{E}[V_t^{\Delta_p}(V_t^{\Delta_n})] + \mathbb{E}[V_t^{\Delta_p}(V_t^{\Delta_n})])$$

Soit $s_k \in \Delta_p$ et t_l le point le plus à droite de Δ_n tel que $t_l \leq s_k < s_{k+1} \leq t_{l+1}$, alors

$$\begin{aligned} V_{s_{k+1}}^{\Delta_n} - V_{s_k}^{\Delta_n} &= (M_{s_{k+1}} - M_{t_l})^2 - (M_{s_k} - M_{t_l})^2 \\ &= (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})(M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l}) \end{aligned}$$

d'où par définition (2.1) de $V_t^{\Delta_p}(V_t^{\Delta_n})$

$$V_t^{\Delta_p}(V_t^{\Delta_n}) \leq V_t^{\Delta_p} \sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l}|^2$$

et par Cauchy-Schwarz

$$\mathbb{E}[V_t^{\Delta_p}(V_t^{\Delta_n})]^2 \leq \mathbb{E}[\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l}|^4] \mathbb{E}[(V_t^{\Delta_p})^2]$$

Comme M est continue et bornée, le terme de droite converge vers 0 quand $n, p \to +\infty$ à condition que $(\mathbb{E}[(V_t^{\Delta_p})^2])_{p \geq 1}$ soit borné.
On a

$$\begin{aligned} (V_t^{\Delta_p})^2 &= \left(\sum_{i=1}^{k-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \right)^2 \\ &= 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{l>i} (M_{t_{l+1}} - M_{t_l})^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + \sum_{i=n+1}^{k-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^4 \quad \text{en développant le carré} \\ &= 2 \sum_{i=1}^{k-1} (V_t^{\Delta_p} - V_{t_{i+1}}^{\Delta_p})(V_{t_{i+1}}^{\Delta_p} - V_{t_i}^{\Delta_p}) + \sum_{i=1}^{k-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^4 \end{aligned}$$

Comme $(M_t^2 - V_t^\Delta, t \geq 0)$ est une martingale et M martingale,

$$\mathbb{E}[V_t^{\Delta_p} - V_{t_{i+1}}^{\Delta_p} | \mathcal{F}_{t_i+1}] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_{t_{i+1}}^2 | F_{t_{i+1}}] = \mathbb{E}[(M_t - M_{t_{i+1}})^2 | F_{t_{i+1}}]$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(V_t^{\Delta_p})^2] &= 2\sum_{i=1}^{k-1} E\big[\mathbb{E}[(V_t^{\Delta_p} - V_{t_i}^{\Delta_p})|\mathcal{F}_{t_{i+1}}](V_{t_{i+1}}^{\Delta_p} - V_{t_i}^{\Delta_p})\big] + \sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{E}[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^4] \\
&= 2\sum_{i=1}^{k-1} E\big[(M_t - M_{t_{i+1}})^2(V_{t_{i+1}}^{\Delta_p} - V_{t_i}^{\Delta_p})\big] + \sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{E}[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^4] \\
&\leq E\left[\big(2\sup_{i\in\{1,\dots,k-1\}}|M_t - M_{t_{i+1}}|^2 + \sup_{i\in\{1,\dots,k-1\}}|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|^2\big)V_t^{\Delta_p}\right]
\end{aligned}$$

Comme M est une martingale bornée par K, et comme $(M_t^2 - V_t^\Delta, t \geq 0)$ est une martingale, on a $\mathbb{E}[V_t^{\Delta_p}] = \mathbb{E}[M_t^2] - \mathbb{E}[M_{t_1}^2 - V_{t_1}^{\Delta_p}]$ et $V_{t_1}^{\Delta_p} = M_{t_1}^2$, d'où

$$\mathbb{E}[V_t^{\Delta_p}] \leq K^2.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}[(V_t^{\Delta_p})^2] \leq \mathbb{E}[12K^2 V_t^{\Delta_p}] \leq 12K^4.$$

La borne est indépendante de k donc de p.
Par conséquent, $V_t^{\Delta_n} - V_t^{\Delta_p}$ converge dans L^2 et donc en proba quand $p, n \to +\infty$. Par conséquent, la limite $< M >_t$ de $\sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2$ existe. Il suffit de considérer des subdivisions emboitées, car si Δ et Δ' deux subdivisions, on peut construire une subdivision $\tilde{\Delta}$ contenant les points de Δ et Δ' (d'où $\Delta \subset \tilde{\Delta}$ et $\Delta' \subset \tilde{\Delta}$, de pas par conséquent inférieur à ceux de Δ et Δ'.
Par ailleurs, par l'inégalité de Doob appliqué à la martingale $(V_s^{\Delta_n} - V_s^{\Delta_p})_{s\leq t}$, on a

$$\mathbb{E}[\sup_{s\leq t}|V_s^{\Delta_n} - V_s^{\Delta_p}|^2] \leq cste\, \mathbb{E}[(V_t^{\Delta_n} - V_t^{\Delta_p})^2].$$

Donc la convergence est uniforme sur tout intervalle de temps borné, donc $< M >$ est continu (convergence dans L^2 implique qu'il existe une sous suite qui converge p.s.).
Comme pour $s \leq t$, $V_s^\Delta \leq V_t^\Delta$ pour toute subdivision Δ, le processus $< M >$ est croissant. Et par passage à la limite dans (2.2) on a $M^2 - < M >$ martingale. $\triangle$

Propriété 2.14 Soit M une martingale locale continue.

1. Si M est une martingale locale, et $X_0 \in L^\infty(\mathcal{F}_0)$, alors $< M + X_0 > = < M >$ et $< X_0 M > = X_0^2 < M >$.
2. Les intervalles sur lesquels M est constante sont exactement ceux pour lesquels $< M >$ est constant.
3. Si M est une martingale locale nulle en 0 alors

$$< M > \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad < M > \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad < M >_\infty = 0.$$

4. Soit T un temps d'arrêt, alors $< M^T >_t = < M >_{t\wedge T}$.
5. Soit M une martingale bornée dans L^2 alors $\mathbb{E}[< M >_\infty] = \mathbb{E}[M_\infty^2]$. En particulier, $M^2 - < M >$ est une *vraie* martingale dominée par une variable de L^1 (donc uniformément intégrable).
6. Réciproquement, si $< M >_\infty \in L^1$ et si $M_0 \in L^2$ alors M est une *vraie* martingale bornée dans L^2 et $M^2 - < M >$ est une *vraie* martingale dominée par une variable de L^1.

Preuve.

1. Évident d'après la Proposition 2.8.
2. Évident.
3. Si $M \equiv 0$, alors M^2 martingale donc $< M > \equiv 0$. Si $< M > \equiv 0$, alors M constante par définition du crochet et donc $M \equiv 0$. Comme $< M >$ croissant, $< M > \equiv 0 \Leftrightarrow < M >_\infty = 0$.
4. Évident par définition du crochet.
5. On peut supposer $M_0 = 0$. M est une martingale fermée. Soit (T_n) une suite de temps d'arrêt bornés réducteurs de $M^2 - < M >$. Alors $\mathbb{E}[M_{T_n}^2] = \mathbb{E}[< M >_{T_n}]$. Par convegence dominée à gauche et convergence monotone à droite, on a $\mathbb{E}[M_\infty^2] = \mathbb{E}[< M >_{T_\infty}]$. Comme la limite est fini, on a $< M >$ borné par $< M >_{T_\infty} \in L^1$. Donc $M^2 - < M >$ est une martingale dominée par une variable de L^1.

△

Définition 2.15 Soient M et N deux martingales locales continues, on définit le *crochet de M et N* par

$$< M, N >= \frac{1}{2}\big(< M + N > - < M > - < N > \big).$$

Propriété 2.16 Soient M et N deux martingales locales continues.

1. $< M, N >$ est un processus continu à variation bornée.
2. $< M, N >$ est l'unique processus à variation bornée tel que $MN - < M, N >$ soit une martingale locale. Par conséquent, si M est N sont indépendantes, $< M, N >= 0$.
3. $< M, M >=< M >$
4. Si T est un temps d'arrêt, alors $< M, N^T >=< M^T, N >=< M^T, N^T >=< M, N >^T$.

Preuve.

1. Évident
2. $MN - < M, N >= \frac{1}{2}\big[(M + N)^2 - M^2 - N^2 - < M + N > + < M > + < N > \big]$ C'est bien une martingale locale. Soit B un autre processus à variation borné tel que $MN - B$ martingale locale. Par différence, on a forcément $B \equiv < M, N >$.
3. Évident
4. Comme $MN - < M, N >$ est une martingale locale, $M^T N^T - < M, N >^T$ est encore une martingale locale, donc par unicité du crochet $< M^T, N^T >=< M, N >^T$. Par ailleurs, pour $t \geq T$, $< M^T >_t =< M >_T$ et $< M^T, N >_t =< M, N >_T + (< N >_t - < N >_T)$, donc $< M^T, N >=< M, N >_T$.

△

Proposition 2.17 Soient M et N deux martingales locales continues. Alors

$$\langle M, N \rangle_t = \lim_{|\Delta| \searrow 0} \sum_{t_i \in \Delta} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \quad \text{en proba.}$$

Par conséquent, $< ., . >$ est une application bilinéaire symétrique.

Preuve. Il suffit de dévellopper $< M + N >_t$ en utilisant la définition 2.10. △

Proposition 2.18 Soient M et M' deux martingales locales. On a $M = M'$ si et seulement si pour toute martingales locales N on a $< M, N >=< M', N >$.

Preuve. Il suffit de prendre $N = M - M'$. △

Le résultat est encore vrai si on travaille avec des martingales bornées dans L^2.

3 Intégrale stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \ \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, avec $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ càd et complète.

3.1 Intégration par rapport au martingales continues bornées dans L^2

Construction de l'intégrale

Définition 3.1 On note $\mathcal{M}_c^2$ l'espace vectoriel des martingales continues nulles en zéro et bornées dans L^2. On le muni du produit scalaire :

$$(M,N)_{\mathcal{M}_c^2} = \mathbb{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbb{E}[< M,N >_\infty].$$

En effet, si $M, N \in \mathcal{M}_c^2$, alors $MN- < M,N >$ est une martingale uniformément intégrable.

Proposition 3.2 $(\mathcal{M}_c^2, ||.||_{\mathcal{M}_c^2})$ est un espace de hilbert, où $||M||_{\mathcal{M}_c^2} = \mathbb{E}[M_\infty^2]^{1/2} = \mathbb{E}[< M >_\infty]^{1/2}$. De plus, $||.||_{\mathcal{M}_c^2}$ est équivalente à $||M|| = \mathbb{E}[\sup_{t\geq 0} M_t^2]^{1/2}$.

Preuve. Il suffit d'utiliser la croissance de $< M >$ et l'inégalité de Doob. L'espace est bien complet, car $(\mathcal{M}_c^2, ||.||)$ est complet. $\triangle$

Exercice 3.3 Soient $(M^n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_c^2$.
La suite converge dans $\mathcal{M}_c^2$ vers M si et seulement si pour tout $t \geq 0$ $< M^n, M >_t$ converge dans L^1 vers $< M >_t$ et $< M^n >_t$ converge dans L^1 vers $< M >_t$.

Preuve. Le résultat est évident car $< M^n + M >_t = < M >_t + 2 < M^n, M >_t + < M^n >_t$. $\triangle$

Définition 3.4 Soit $M \in \mathcal{M}_c^2$. On note $L^2(M)$ l'espace vectoriel des processus H progressivement mesurables tels que

$$E\Big[\int_0^{+\infty} H_s^2 d < M >_s \Big] < \infty.$$

On munit l'espace de la norme

$$||H||_{L^2(M)} = E\Big[\int_0^{+\infty} H_s^2 d < M >_s \Big]^{1/2}$$

Remarque 3.5 Comme $< M >_\infty \in L^1$, $L^2(M)$ contient tous les processus progressivement mesurables bornés.

Définition 3.6 On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des processus H progressivement mesurables élémentaires, i.e. $H \in \mathcal{E}$ s'il existe $0 = t_1 < \ldots < t_n < \infty = t_{n+1}$, et $h_0, \ldots, h_n$ des v.a. telles que $\forall i$ h_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable bornée tels que

$$H = h_0 \mathbb{I}_{\{0\}} + \sum_{i=1}^n h_i \mathbb{I}_{]t_i, t_{i+1}]}.$$

Remarque 3.7 Les processus de $\mathcal{E}$ sont dits *prévisibles*. Pour tout $t \geq 0$, H_t est $\mathcal{F}_{t^-}$-mesurable.

Théorème 3.8 Pour tout $M \in \mathcal{M}_c^2$, $\mathcal{E}$ est dense dans $L^2(M)$.

Preuve.

$i)$ Montrons que $\mathcal{E} \subset L^2(M)$

Soit $H \in \mathcal{E}$, alors H bornée donc $H \in L^2(M)$.

$ii)$ Soit H continu borné par K.

On pose $H_t^n = H_{[2^n t]2^{-n}} \mathbb{I}_{t \leq n}$. On a bien $H_t^n \in \mathcal{E}$. Comme H continue, pour tout $t \geq 0$ H_t^n converge vers H_t quand $n \to +\infty$ de façon dominée par $2K$. Donc la convergence a lieu dans $L^2(M)$.

iii) Soit H progressivement mesurable borné par K.

On pose $H_t^n = n \displaystyle\int_t^{t+1/n} H_s ds$. H^n est bien un processus progressivement mesurable continu et borné par K. À ω fixé, pour presque tout $t \geq 0$, $H_t^n(\omega) \to H_t(\omega)$ quand $n \to +\infty$ de façon dominé par $2K$. Donc la convergence a donc lieu dans $L^2(M)$.

iv) Soit $H \in L^2(M)$.

On pose $H^n = H \mathbb{I}_{|H| \leq n}$ qui est bien un processus progessivement mesurable borné. Comme $H \in L^2(M)$, H est fini p.s., $H^n \to H_t$ quand $n \to +\infty$. Par convergence dominée

$$E\Big[\int_0^{+\infty} (H_s^n - H_s)^2 d < M >_s \Big] = E\Big[\int_0^{+\infty} H_s^2 \mathbb{I}_{|H_s| > n} d < M >_s \Big]$$

converge vers 0 quand $n \to +\infty$. $\triangle$

Proposition 3.9 On munit $L^2(M)$ du produit scalaire

$$(H, K)_{L^2(M)} = E\Big[\int_0^{+\infty} H_s K_s d < M >_s \Big].$$

Alors $(L^2(M), ||.||_{L^2(M)})$ est une espace de hilbert.

Preuve. On utilise juste le fait que L^1 est complet et que la limite de processus progressivement mesurables est progressivement mesurable. $\triangle$

On introduit maintenant l'intégrale stochastique pour les processus simples :

Définition 3.10 Soit $M \in \mathcal{M}_c^2$ et $H \in \mathcal{E}$ avec $H = h_0 \mathbb{I}_{\{0\}} + \sum_{i=1}^n h_i \mathbb{I}_{]t_i, t_{i+1}]}$. On définit alors

$$(H.M)_t = \sum_{i=1}^n h_i (M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}).$$

Remarque 3.11
1. $H.M \in \mathcal{M}_c^2$.
2. Pour $H \in \mathcal{E}$ et $M, N \in \mathcal{M}_c^2$, on a

$$< (H.M), N >_t = \int_0^t H_s d < M, N >_s = H. < M, N >_t$$

Preuve.

1. Il reste juste à montrer que $H.M$ est une martingale. Fixons $i \geq 0$ et calculons la quantité $\mathbb{E}[h_i(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) | \mathcal{F}_s]$ pour $t \geq s$. On sait que $(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t})_{t \geq 0}$ est une martingale. Pour $s \geq t_i$, $\mathbb{E}[h_i(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) | \mathcal{F}_s] = h_i \mathbb{E}[(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) | \mathcal{F}_s] = h_i(M_{t_{i+1} \wedge s} - M_{t_i \wedge s})$. Pour $s < t_i$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h_i(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[h_i(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) | \mathcal{F}_{t_i}] | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[h_i(M_{t_i \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) | \mathcal{F}_s] = 0 \end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{E}[h_i(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) | \mathcal{F}_s] = h_i(M_{t_{i+1} \wedge s} - M_{t_i \wedge s})$$

Donc $\big(h_i(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t})\big)_{t \geq 0}$ est une martingale, par conséquent $H.M$ est une martingale.

2. Par bilinéarité du crochet il suffit montrer la propriété pour $H = h_i \mathbb{I}_{]t_i,t_{i+1}]}$. Comme $MN- < M,N >$ est une martingale, on a $M^{t_{i+1}}N- < M,N >^{t_{i+1}}$ et $M^{t_i}N- < M,N >^{t_i}$ martingales. Par conséquent, $(M^{t_{i+1}}-M^{t_i})N-(< M,N >^{t_{i+1}} - < M,N >^{t_i})$ martingale. Comme $h_i \in L^\infty(\mathcal{F}_{t_i})$, $h_i(M^{t_{i+1}} - M^{t_i})N - h_i(< M,N >^{t_{i+1}} - < M,N >^{t_i})$ est une martingale (cf 1.), donc $(H.M)N - \int_0^\bullet H_s d < M,N >_s$ est une martingale.

$\triangle$

Théorème 3.12 Soit $M \in \mathcal{M}_c^2$ fixé. L'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \to & \mathcal{M}_c^2 \\ H & \mapsto & H.M \end{array}$$

se prolonge de façon unique en une isométrie de $L^2(M)$ sur $\mathcal{M}_c^2$, notée encore $H.M$.
On appelle $H.M$ *intégrale stochastique de* H *par rapport à* M et on note souvent

$$(H.M)_t = \int_{]0,t]} H_s dM_s = \int_0^t H_s dM_s.$$

Preuve. L'application est bien linéaire. Par ailleurs, pour $H \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} ||H.M||^2_{\mathcal{M}_c^2} &= \mathbb{E}[(H.M)^2_\infty] = E\big[(\sum_{i=1}^n h_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}))^2\big] \\ &= E\big[\sum_{i=1}^n h_i^2(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\big] \quad \text{car } H.M \text{ martingale} \\ &= E\big[\sum_{i=1}^n h_i^2(M^2_{t_{i+1}} - M^2_{t_i})\big] \quad \text{car } M \text{ martingale} \\ &= E\big[\sum_{i=1}^n h_i^2(< M_{t_{i+1}} > - < M_{t_i} >)\big] \quad \text{car } M^2- < M > \text{ martingale} \\ &= ||H||^2_{L^2(M)} \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{E}$ est dense dans $L^2(M)$ et $\mathcal{M}_c^2$ espace de Hilbert, l'application se prolonge à $L^2(M)$ en une isométrie. $\triangle$

Comportement de l'intégrale vis à vis du crochet

Donnons tout d'abord une inégalité essentielle dans le calcul stochastique :

Proposition 3.13 *Inégalité de Kunita* & *Watanabe* (1967)
Soient $M, N \in \mathcal{M}_c^2$ et H, K deux processus progressivement mesurables. Alors p.s. pour tout $t \geq 0$,

$$\int_0^t |H_s K_s||d < M,N >_s| \leq \Big(\int_0^t H_s^2 d < M >_s\Big)^{1/2}\Big(\int_0^t K_s^2 d < N >_s\Big)^{1/2}. \tag{3.3}$$

Conséquence 3.14 On a $| < M,N > |^2 \leq < M >< N >$.

Preuve. Par le théorème de convergence monotone, il suffit de montrer l'inégalité pour H et K bornés. Par ailleurs, il suffit en fait de vérifier

$$\Big|\int_0^t H_s K_s d < M,N >_s\Big| \leq \Big(\int_0^t H_s^2 d < M >_s\Big)^{1/2}\Big(\int_0^t K_s^2 d < N >_s\Big)^{1/2}. \tag{3.4}$$

En effet, si on note g la densité de la mesure de Stieljes $d < M,N >$ par rapport à $|d < M,N > |$ (g est à valeurs dans $\{-1, 1\}$). En remplaçant H par $g\,H\,\mathrm{sgn}(HK)$ dans le terme de gauche de (3.3), on obtient l'inégalité souhaitée.

i) Cas où $HK = \mathbb{I}_{]s,t]}$ avec $s \leq t$.
On a en proba

$$\begin{aligned} | < M,N >_t - < M,N >_s | &= \lim_{|\Delta| \searrow 0} \sum_{t_i \in \Delta \text{ subdiv de } [s,t]} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \\ &\leq \lim_{|\Delta| \searrow 0} \Big(\sum_{t_i \in \Delta} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{t_i \in \Delta} (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})^2 \Big)^{1/2} \quad \text{par Cauchy-Schwarz.} \end{aligned}$$

Donc par continuité des trajectoires p.s. $\forall t \geq s$

$$| < M,N >_t - < M,N >_s | \leq \Big(< M >_t - < M >_s \Big)^{1/2} \Big(< N >_t - < N >_s \Big)^{1/2}.$$

ii) Cas H et K processus progessivement mesurables simples.
Soient $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty = t_{n+1}$, et $h_0, \ldots, h_n$ des v.a. telles que $\forall i \; h_i \in L^\infty(\mathcal{F}_{t_i})$ tels que $H = h_0 \mathbb{I}_{\{0\}} + \sum h_i \mathbb{I}_{]t_i,t_{i+1}]}$.
Soient $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m < \infty = s_{k+1}$, et $k_0, \ldots, k_m$ des v.a. telles que $\forall j \; k_j \in L^\infty(\mathcal{F}_{t_j})$ tels que $K = k_0 \mathbb{I}_{\{0\}} + \sum k_j \mathbb{I}_{]s_j,s_{j+1}]}$.
On pose $a_{ij} = t_i \vee s_j$ et $b_{ij} = t_{i+1} \wedge s_{j+1}$, alors

$$HK = h_0 k_0 \mathbb{I}_{\{0\}} + \sum_{i,j} h_i k_j \mathbb{I}_{C_{ij}}$$

où $C_{ij} =]a_{ij}, b_{ij}]$ si $a_{ij} < b_{ij}$ et $C_{ij} = \emptyset$ sinon.
Alors

$$\begin{aligned} | \int_0^t H_s K_s d < M,N >_s | &= | \sum_{i,j : C_{i,j} \neq \emptyset} h_i k_j \int_{a_{ij}}^{b_{ij}} d < M,N >_s | \\ &\leq \sum_{i,j : C_{i,j} \neq \emptyset} \Big(\int_{a_{ij}}^{b_{ij}} h_i^2 d < M >_s \Big)^{1/2} \Big(\int_{a_{ij}}^{b_{ij}} k_j^2 d < N >_s \Big)^{1/2} \\ &\leq \sum_{i,j} \Big(\int_{t_i}^{t_{i+1}} h_i^2 d < M >_s \Big)^{1/2} \Big(\int_{s_j}^{s_{j+1}} k_j^2 d < N >_s \Big)^{1/2} \\ &\leq \Big(\int_0^t H_s^2 d < M >_s \Big)^{1/2} \Big(\int_0^t K_s^2 d < N >_s \Big)^{1/2} \end{aligned}$$

iii) Cas H et K processus progessivement mesurables bornés.
Il existe deux suites de processus simples $(H^n)_{n \geq 0}$ et $(K^n)_{n \geq 0}$ qui convergent respectivement vers H et K de façon dominées. On conclut par le théorème de convergence dominé. △

Proposition 3.15 Soient $M, N \in \mathcal{M}_c^2$ et $H \in L^2(M)$. Alors

$$< H.M, N >= H. < M,N >= \int_0^\bullet H_s d < M,N >_s .$$

En particulier, $< H.M >_t = \int_0^t H_s^2 d < M >_s$.

Preuve. L'égalité est évidente si $H \in \mathcal{E}$.
Si $H \in L^2(M)$. On approche H par une suite $(H^n)_{n \geq 0}$ de $\mathcal{E}$. D'après l'inégalité de Kunita-Watanabé, $< H^n.M, N >_t$ converge dans L^1 vers $< H.M, N >_t$ pour tout $N \in \mathcal{M}_c^2$. △

On peut alors donner une caractérisation de l'intégrale stochastique (voir proposition 2.17).

Proposition 3.16 *$H.M$ est l'unique élément de $\mathcal{M}_c^2$ tel que $< H.M, N >= H. < M,N >$ pour tout $N \in \mathcal{M}_c^2$.*

Théorème 3.17 Soit $M \in \mathcal{M}_c^2$. Pour tout $H \in L^2(M)$, $H.M$ est l'unique processus de $\mathcal{M}_c^2$ tel que $H.M \in \mathcal{M}_c^2$ et pour tout $N \in \mathcal{M}_c^2$

$$(H.M, N)_{\mathcal{M}_c^2} = \mathbb{E}[\int_0^\infty H_s d < M, N >_s].$$

Preuve. Considérons la forme linéaire sur $\mathcal{M}_c^2$ définie par

$$N \mapsto \mathbb{E}[\int_0^\infty H_s d < M, N >_s]$$

D'après l'inégalité de Kunita-Watanabé et Cauchy-Shwarz, on a

$$\mathbb{E}[\int_0^\infty H_s d < M, N >_s] \leq \mathbb{E}[\int_0^\infty H_s^2 d < M >_s]^{1/2} \mathbb{E}[< N >_\infty]^{1/2} \leq ||H||_{L^2(M)} ||N||_{\mathcal{M}_c^2}$$

L'application précédente est donc continue. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique processus Z de $\mathcal{M}_c^2$ tel que $\forall N \in \mathcal{M}_c^2$

$$(Z, N)_{\mathcal{M}_c^2} = \mathbb{E}[\int_0^\infty H_s d < M, N >_s]$$

Vérifions que Z coïncide avec $H.M$. En effet, d'après la proposition précédente, pour tout $N \in \mathcal{M}_c^2$

$$(H.M, N)_{\mathcal{M}_c^2} = \mathbb{E}[< H.M, N >_\infty] = \mathbb{E}[H. < M, N >_\infty].$$

$\triangle$

Propriété 3.18

1. *Compatibilité avec les temps d'arrêt* :
   Soit $M \in \mathcal{M}_c^2$, $H \in L^2(M)$ et T un temps d'arrêt, alors
   $$(\mathbb{I}_{[0,T]} H).M = H.M^T = (H.M)^T,$$
   c'est à dire
   $$\int_0^t \mathbb{I}_{[0,T]}(s) H_s dM_s = \int_0^{t \wedge T} H_s dM_s = \int_0^t H_s dM_s^T.$$
2. *Associativité de l'intégrale* :
   Soit $M \in \mathcal{M}_c^2$, $H \in L^2(M)$ et $K \in L^2(H.M)$, alors $KH \in L^2(M)$ et
   $$(KH).M = K.(H.M),$$
   c'est à dire
   $$\int_0^t K_s H_s dM_s = \int_0^t K_s d(H.M)_s.$$

Preuve. On utilise le fait que $H.M$ est l'unique élément de $\mathcal{M}_c^2$ tel que pour tout $N \in \mathcal{M}_c^2$, $< H.M, N >= H. < M, N >$.

1. Pour tout $N \in \mathcal{M}_c^2$
   $$\begin{aligned} < (\mathbb{I}_{[0,T]} H).M, N >_t &= \int_0^t \mathbb{I}_{[0,T]}(s) H_s d < M, N >_s \\ &= \int_0^{t \wedge T} H_s d < M, N >_s = \int_0^t H_s d < M, N >_{s \wedge T} = \int_0^t H_s d < M^T, N >_s \end{aligned}$$
2. Pour tout $N \in \mathcal{M}_c^2$, en utilisant l'associativité de l'intégrale pour les processus à variation bornée
   $$< K.(H.M), N >= K. < H.M, N >= KH. < M, N > .$$

$\triangle$

3.2 Extension aux semimartingales continues

Définition 3.19 Un processus aléatoire X est une *semimartingale* continue s'il admet une décomposition de la forme

$$X = M + A$$

où M est une martingale locale continue et A un processus à variation bornée (adapté, continu et nul en 0).
Une telle décomposition est unique, on parle de la décomposition canonique de la semimartingale

Si $X = M + A$ et $X' = M' + A'$ sont deux semimartingales, on définit $< X, X' >:=< M, M' >$.

Théorème 3.20 *Décomposition de Doob-Meyer*
Soit X une surmartingale continue positive telle que pour tout T temps d'arrêt, X^T est U.I. Alors X admet une unique décomposition $X = M - A$ avec M martingale et A processus croissant

Proposition 3.21 Soient X et X' deux semimartingales continues. Alors

$$\langle X, X'\rangle_t = \lim_{|\Delta|\searrow 0} \sum_{t_i\in\Delta} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(X'_{t_{i+1}} - X'_{t_i}) \quad \text{en proba}$$

où $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t)$ subdivision de $[0, t]$

Remarque 3.22 Si X ou X' est à variation bornée, alors $\langle X, X'\rangle \equiv 0$.

Preuve. L'égalité est vraie pour les martingales locales. Par Cauchy-Schwarz, on a

$$\sum_{t_i\in\Delta} (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \le (\sum (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})^2)^{1/2} (\sum (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2)^{1/2}.$$

Si B est à variation bornée, alors

$$\sum (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \le \sup |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \sum |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \le \sup |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| |dB|([0, t]).$$

Comme B est continu et à variation bornée, le terme de gauche converge vers 0. Par conséquent, si N est soit une martingale locale soit un processus à variation bornée, on a

$$\lim_{|\Delta|\searrow 0} \sum_{t_i\in\Delta} (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = 0.$$

D'où le résultat en décomposant les semimartingales et en développant le produit $(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(X'_{t_{i+1}} - X'_{t_i})$. △

Définition 3.23 On dit qu'un processus progressif H est localement borné s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(T_n)_{n\ge 0}$ avec $T_n \to +\infty$ p.s. tel que pour tout $n \ge 0$ le processus arrêté H^{T_n} soit borné.

Remarque 3.24 Si H est localement borné alors pour $t \ge 0$, p.s. $\sup_{s\le t} |H_s| < \infty$. La réciproque est fausse (par exple, prendre H_0 non borné).
Par contre, si H est continu et H_0 borné, alors H est localement borné (prendre $T_n = \inf\{t \ge 0 : |H_t - H_0| = n\}$).

Définition 3.25 On définit l'*intégrale stochastique* $(H.X)_t = \int_0^t H_s dX_s$ *d'un processus localement borné* H *par rapport à une semimartingale* X par localisation successives.

Supposons $X_0 = 0$ et $X = M + A$ sa décomposition canonique.
On définit pour presque tout ω, $\int_0^t H_s(\omega)dA_s(\omega)$ sans problème ($dA(\omega)$ est la mesure de Stieljes associée à $A(\omega)$).
Soit (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt avec $T_n \to +\infty$ p.s. qui localise à la fois H et M telle que $M^{T_n} \in \mathcal{M}_c^2$. Alors $\int_0^t H_s^{T_n} dM_s^{T_n}$ a un sens. Par ailleurs pour $t \leq T_n$, grâce à la compatibilité de l'intégrale avec les temps d'arrêt, on a

$$\int_0^t H_s^{T_{n+1}} dM_s^{T_{n+1}} = \int_0^t H_s^{T_n} dM_s^{T_n}$$

Il existe donc un processus, noté H.M, tel que sur $\{t \leq T_n\}$ $(H.M)_t = (H^{T_n}.M^{T_n})_t$. On définit alors

$$(H.X)_t = (H.M)_t + (H.A)_t.$$

Si $X_0 \neq 0$, on a $H.X = H.(X - X_0)$.

Proposition 3.26 Soit X une semimartingale et H un processus localement borné, alors $H.X$ est une semimartingale de décomposition canonique $H.X = H.M + H.A$.

Les propriétés de l'intégrale restent vraies :

Propriété 3.27 Soient X, X' deux semimartingales locales et H, K deux processus localement bornés.

1. *Inégalité de Kunita & Watanabe* : p.s. pour tout $t \geq 0$,

$$\int_0^t |H_s K_s||d < X, X' >_s| \leq \Big(\int_0^t H_s^2 d < X >_s \Big)^{1/2} \Big(\int_0^t K_s^2 d < X' >_s \Big)^{1/2}.$$

2. *Compatibilité avec les temps d'arrêt* : Soit T un temps d'arrêt, alors

$$(\mathbb{I}_{[0,T]} H).X = H.X^T = (H.X)^T.$$

3. *Associativité de l'intégrale* :

$$(KH).X = K.(H.X).$$

4. Si $X = M$ martingale locale nulle en 0, $H.M$ est l'unique martingale locale telle que $< H.M, N >= H. < M, N >$ pour toute martingale locale N.

Convergence des intégrales stochastiques

Théorème 3.28 Soit M une martingale locale avec $M_0 = 0$ et H un processus localement borné.
Soit $(H^n)_{n \geq 0}$ une suite de processus localement bornés tels que pour tout $t \geq 0$

$$\int_0^t (H_s^n - H_s)^2 d < M >_s \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{p.s.}$$

Alors

$$\int_0^t H_s^n dM_s \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^t H_s dM_s \quad \text{en probabilité.}$$

*Preuve.*Supposons $M_0 = 0$.
Rappel : *Théorème de Lévy*

> Une suite de fonctions continues et croissantes qui converge simplement vers une fonction continue sur un intervalle I, alors la convergence est uniforme sur I.

Soit $T > 0$. Le processus $t \mapsto \int_0^t (H_s^n - H_s)^2 d < M >_s$ est croissant, donc la convergence est uniforme sur $[0,T]$. En particulier, $\sup_n \int_0^t (H_s^n)^2 d < M >_s$ est une fonction continue.
On pose $A_t =< M >_t + \sup_n \int_0^t (H_s^n)^2 d < M >_s$. C'est un processus croissant (adapté, continu et nul en 0).
On pose $T_k = \inf\{t \geq 0 : A_t = k\}$. C'est une suite croissante de temps d'arrêt qui converge vers $+\infty$ p.s.
On a $< M >_{T_k} \leq k$. Par conséquent, la martingale locale M^{T_k} est une vraie martingale bornée dans L^2 (voir Proposition 2.14). De plus, on a $H^n \in L^2(M^{T_k})$ car

$$\int_0^t (H_s^n)^2 d < M^{T_k} >_s \leq k$$

Par convergence dominée, on a

$$||H^n - H||_{L^2(M^{T_k})} = \mathbb{E}[\int_0^\infty (H_s^n - H_s)^2 d < M^{T_k} >_s] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par isométrie, on a donc $H^n.M^{T_k}$ converge vers $H.M^{T_k}$ dans $\mathcal{M}_c^2$. Comme (T_k) converge vers $+\infty$ p.s., on a le résultat. △

Proposition 3.29 Soit H un processus progressif continu avec H_0 borné. Soit X une semimartingale et $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t)$ une subdivision de $[0,t]$. Alors

$$(H.X)_t = \int_0^t H_s dX_s = \lim \sum_{t_i \in \Delta} H_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \quad \text{en probabilité}$$

quand le pas $|\Delta|$ tend vers 0.

Preuve. Comme H est continu et H_0 borné, H est localement borné.
On peut supposer $X_0 = 0$ et $H_0 = 0$ car $H.X = (H - H_0).X + H_0 X_t - H_0 X_0$ et $H_0 X_t - H_0 X_0 = \sum H_0(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$.
On décompose $X = M + A$.
Considérons une suite $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ de subdivision de $[0,t]$ dont le pas $|\Delta_n|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
On a

$$\sum_{t_i \in \Delta_n} H_{t_i}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) = (H^n.M)_t$$

où H^n est le processus simple $H_s^n = H_{t_i}$ sur $]t_i, t_{i+1}]$ et H_s^n converge p.s. vers H_s car H continu, d'où comme H localement borné

$$\int_0^t (H_s^n - H_s)^2 d < M >_s \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{p.s.}$$

Donc, il y a convergence des intégrales stochastiques. Par ailleurs les sommes de "Riemann" converges par convergence dominée. △

Corollaire 3.30 *Formule d'intégration par partie*
Soit X, Y deux semimartingales continues. On a

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + < X, Y >_t .$$

Conséquence 3.31 Le produit de deux semimartingales est une semimartingale.

Preuve. Soit Δ une subdivision de $[0,t]$. On a

$$\begin{aligned} X_tY_t - X_0Y_0 &= \sum(X_{t_{i+1}}Y_{t_{i+1}} - X_{t_i}Y_{t_i}) \\ &= \sum X_{t_i}(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) + \sum Y_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + \sum(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) \end{aligned}$$

On obtient le résultat en passant à la limite. △

Exercice 3.32 Soit B un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t^B)_{(t\geq 0)}$ sa filtration naturelle. Le processus $M_t = B_t^2 - t$ est une martingale. Montrer que $< M, B >$ est un processus gaussien dont on déterminera la covariance.

Preuve. On remarque que $M_t = 2\int_0^t B_s dB_s$. Par conséquent, $< M, B >_t = 2\int_0^t B_s ds$. C'est bien un processus gaussien (il suffit de voir l'intégrale comme limite de sommes de Riemann), centré (Fubini), de covariance (Fubini)

$$\mathbb{E}[2\int_0^t B_u du 2\int_0^s B_v dv] = 4\int_0^t\int_0^s \mathbb{E}[B_uB_v]dudv = 4\int_0^t\int_0^s u\wedge v dudv.$$

Le processus $< M, B >$ est à variation borné, donc ce n'est pas une martingale. △

4 Que se passe t'il dans le cas càdlàg ?

On peut par exemple regarder les livres de Dellacherie-Meyer [4] et de Protter [8]. (Attention à la définition de l'intégrale chez Protter !)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \ \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré avec les conditions habituelles.
On définit l'espace des processus *prévisibles* l'espace des processus $(\mathcal{F}_{t^-})_{t\geq 0}$-adaptés et càg. On définit l'espace des processus *optionnels* l'espace des processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptés et càd.

Dans le cadre càdlàg la décomposition d'une semimartingale en une partie martingale locale et un processus à bornée n'est plus unique (on peut jouer sur les sauts), par contre si on impose que le processus à variation fini soit prévisible, il y a unicité de la décomposition.

Proposition 4.1 Soit M une martingale locale càdlàg de carré intégrable. On définit

$$\begin{aligned} [M]_t &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{t_i\in\Delta} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \\ < M >_t &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{t_i\in\Delta} \mathbb{E}[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 | \mathcal{F}_{t_i}] \end{aligned}$$

Les processus $[M]$ et $< M >$ sont à variations bornée, et $< M >$ est prévisible.

Remarque 4.2 Si M est continue, on a $[M]_t =< M >_t$.

Théorème 4.3 *Décomposition de Doob-Meyer*
Soit X une surmartingale càdlàg positive telle que pour tout T temps d'arrêt, X^T est U.I. Alors X admet une unique décomposition $X = M - A$ avec M martingale et A processus croissant prévisible.

Proposition 4.4 Soit M une martingale locale de carré intégrable. Alors $< M >$ est l'unique processus prévisible tel que $M^2 - < M >$ soit une martingale locale.

On considère $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des processus H prévisibles élémentaires, i.e. $H \in \mathcal{E}$ s'il existe $0 = t_1 < \ldots < t_n < \infty = t_{n+1}$, et $h_0, \ldots, h_n$ des v.a. telles que $\forall i$ h_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable bornée tels que

$$H = h_0 \mathbb{I}_{\{0\}} + \sum_{i=1}^{n} h_i \mathbb{I}_{]t_i, t_{i+1}]}.$$

On définit l'*espace de Skorohod* $\mathbb{D}$ des processus adaptés à trajectoires càdlàg et $\mathbb{L}$ l'espace des processus adapté à trajectoires làdcàg.
Alors l'espace $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathbb{L}$ pour la convergence en probabilité uniforme sur les compact (notée ucp) : H^n converge vers H au sens ucp si

$$\forall t > 0, \ \sup_{0 \le s \le t} |H^n_s - H_s| \text{ converge en probabilité vers } 0.$$

Définition 4.5 On définit le processus de sauts ΔX d'un processus X par

$$\Delta X_t = X_t - X_{t^-}.$$

On peut alors définir l'intégrale stochastique $H.X$ pour X semimartingale càdlàg et $H \in \mathbb{L}$ comme limite ucp de $H^n.X$ où $H^n \in \mathcal{E}$. Alors $H.X$ est une semimartingale càdlàg. On a pour $t \ge s$

$$\int_s^t H_s dX_s = \int_{]s,t]} H_s dX_s = \int_{[s,t]} H_s dX_s - H_s \Delta X_s.$$

Propriété 4.6 Soit X une semimartingales càdlàg et $H \in \mathbb{L}$.

1. Si T est une temps d'arrêt, alors $(H.X)^T = H\mathbb{I}_{[0,T]}.X = H.X^T$.
2. Le processus de saut $\Delta(H.X)$ est indistinguable de $H(\Delta X)$, i.e. p.s. les trajectoires $t \mapsto \Delta(H.X)_t$ sont les mêmes que $t \mapsto H(\Delta X)_t$.
3. *Associativité* : Si $H, G \in \mathbb{L}$, alors $G.(H.X) = GH.X$.
4. si X est une martingale locale càdlàg de carré intégrable et $H \in \mathbb{L}$, alors $H.X$ est aussi une martingale locale càdlàg de carré intégrable.

Remarque 4.7 Soit N un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ et $\tilde{N}$ le processus de Poisson compensé associé à N. On note (T_k) la suite des instants de saut de N. Soit $H = \mathbb{I}_{[0,T_1)}$, on a $H \in \mathbb{D}$ et

$$\int_0^t H_s d\tilde{N}_s = \int_0^t H_s dN_s - \lambda \int_0^t H_s ds = \int_{]0, t\wedge T_1[} dN_s - \lambda(t \wedge T_1) = -\lambda(t \wedge T_1).$$

Ce n'est pas une martingale, ceci explique pourquoi on travaille avec des processus de $\mathbb{L}$.

Théorème 4.8 Soit X une semimartingale càdlàg et $Y \in \mathbb{D}$ ou $Y \in \mathbb{L}$.
Soit Δ_n une suite de subdivision aléatoire $\Delta_n = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < +\infty\}$ de $\mathbb{R}^+$ dont le pas $|\Delta_n|$ tend vers 0. On note

$$Y^n = Y_0 \mathbb{I}_{\{0\}} + \sum_{t_i \in \Delta_n} Y_{t_i} \mathbb{I}_{]t_i, t_{i+1}]}.$$

Alors le processus $\int_{]0,t]} Y^n dX_s$ converge ucp vers $\displaystyle\int_0^\bullet Y_{s^-} dX_s$.

Propriété 4.9 Le crochet $[.,.]$ vérifie alors pour X, Y semimartingales càdlàg

1. Si X, Y martingales locales de carré intégrable càdlàg, alors $[X,Y]$ est l'unique processus càdlàg à variation finie nul en 0 tel que $XY - [X,Y]$ martingale locale et $\Delta[X,Y] = \Delta X \Delta Y$.
2. $X_t Y_t - X_0 Y_0 = \displaystyle\int_0^t X_{s^-} dY_s + \int_0^t Y_{s^-} dX_s + [X,Y]_t$,
3. $\Delta[X,Y] = \Delta X \Delta Y$.