Université de Rennes 1
UFR de Mathématiques

L3 Mathématiques
Probabilités
2017/2020

Fiche de TD n^0 1
Espace de probabilité, Variables aléatoires

Espace de probabilité

Exercice 1 (Tribu discrète) Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Déterminer la tribu $\sigma(\{A, B, C\})$ où $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \emptyset$.

1. Quelles sont les variables aléatoires réelles définies sur Ω ?
2. Que se passe-t-il si on retire C ?
3. Que rajouter à $\{A, B, C\}$ pour engendrer $\mathcal{P}(\Omega)$?

Exercice 2 (Convergence monotone pour les probabilités) Soit l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, +\infty[$ une application additive (c'est-à-dire $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ lorsque $A, B \in \mathcal{F}$ et $A \cap B = \emptyset$), telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Montrer que les quatre affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{P}$ est une probabilité (c'est-à-dire elle est σ-additive).
2. $\mathbb{P}$ est continue sur des suites croissantes :
$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
(On notera pour des telles suites croissantes $\lim_n A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.)
3. $\mathbb{P}$ est continue sur des suites décroissantes :
$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
(On notera pour des telles suites décroissantes $\lim_n A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.)
4. $\mathbb{P}$ est continue sur des suites décroissantes vers $\emptyset$:
$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \supset A_{n+1} \text{ et } \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.$$

Exercice 3 (Limites inférieure et supérieure) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On considère une suite d'ensembles mesurables $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ et on note
$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} A_m, \quad \limsup_n A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m.$$

1. Montrer que $\omega \in \liminf_n A_n$ ssi à partir d'un certain rang, ω est dans tous les A_n.
2. Montrer que $\omega \in \limsup_n A_n$ ssi ω est dans une infinité de A_n.

3. Montrer que $\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_n A_n)$.
4. On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$. Montrer que si la suite est croissante (respectivement décroissante) alors elle est convergente et
$$\lim_n A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \text{(respectivement } \lim_n A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{).}$$
5. Montrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on a la propriété de continuité de la mesure : $\mathbb{P}(\lim_n A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Exercice 4 (Presque sûr) On dit qu'un évènement $A \in \mathcal{F}$ est presque sûr si A est presque sûrement égal à Ω, c'est-à-dire $\Omega = A \cup N$ avec N un ensemble négligeable (ie. $\exists B \in \mathcal{F} : N \subset B, \mathbb{P}(B) = 0$). Soit $(A_j)_{j\in J}$, $J \subset \mathbb{N}$, une famille d'évènements presque sûrs. Montrer que $\bigcap_{j\in J} A_j$ est presque sûr.

Exercice 5 (Tribu complète) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit la famille d'ensembles suivante :

$$\mathcal{F}_{\mathbb{P}} = \{C \in \mathcal{P}(\Omega) \ : \ \exists A_1, A_2 \in \mathcal{F}, \text{tels que} A_1 \subset C \subset A_2 \text{ et } \mathbb{P}(A_2 \setminus A_1) = 0\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}_{\mathbb{P}} = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$ où $\mathcal{N}$ est la classe des ensembles $\mathbb{P}$-négligeables, ie. $\mathcal{N} = \{N \subset \Omega : \exists A \in \mathcal{F} : N \subset A, \mathbb{P}(A) = 0\}$.
2. On définit $\bar{\mathbb{P}}$ sur $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}$ par $\bar{\mathbb{P}}(C) = \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$. Montrer que $\bar{\mathbb{P}}$ est bien définie (c'est-à-dire que sa valeur ne dépend par du choix de A_1 et de A_2). Montrer que $\bar{\mathbb{P}}$ est la seule mesure sur $\mathcal{F}_{\mathbb{P}} = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$ qui prolonge $\mathbb{P}$ (ie. qui coïncide avec $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}$).
3. Montrer que pour toute fonction X réelle $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}$-mesurable, il existe deux variables aléatoires (ie. $\mathcal{F}$-mesurables) U, V réelles telles que $U \leq X \leq V$ et $V - U = 0$ $\mathbb{P}$-p.s.

Variables aléatoires

Exercice 6 (Variable aléatoire constante) Montrer qu'une application $\Omega \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une variable aléatoire par rapport à la tribu triviale sur Ω si et seulement si elle est constante.

Exercice 7 (Comparaison de limite supérieure et inférieure d'ensembles et de v.a.) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles définies sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$.
1. Comparer les ensembles $\{\limsup_n X_n > 1\}$, $\limsup_n \{X_n > 1\}$,$\{\limsup_n X_n \geq 1\}$ et $\limsup_n \{X_n \geq 1\}$.
2. Comparer les ensembles $\{\liminf_n X_n > 1\}$, $\liminf_n \{X_n > 1\}$,$\{\liminf_n X_n \geq 1\}$ et $\liminf_n \{X_n \geq 1\}$.

Exercice 8 (Approximation) Soit X une variable aléatoire positive. On considère

$$A_{n,k} = \left\{\omega : \frac{k-1}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k}{2^n}\right\}, \quad B_n = \{\omega : X(\omega) > n\}.$$

1. Montrer que $X_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbf{1}_{A_{n,k}} + n\mathbf{1}_{B_n}$ est une variable aléatoire.
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.
3. Montrer que $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

Exercice 9 (Copies ordonnées)

1. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que
$$\mathbb{P}(Y \leq t < X) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
Montrer que $\mathbb{P}(Y < X) = 0$.
2. On suppose cette fois que X et Y ont même loi. Montrer que si $X \geq Y$ p.s. alors X et Y sont presque sûrement égales.

Exercice 10

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-2}}{4} \frac{2^k}{k!}(1 + ak) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$
pour une unique valeur de a qu'on déterminera.
2. Soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Trouver la loi de
$$Z := \begin{cases} Y/2 & \text{si } Y \text{ est pair,} \\ (1-Y)/2 & \text{si } Y \text{ est impair.} \end{cases}$$
3. Soit T une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On considère $U = 4[T/2] - 2T + 1$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Trouver la loi de U.

Exercice 11

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X dont la fonction de répartition vaut
$$F(t) = (1 + e^{-t})^{-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
2. Calculer la densité de X.
3. On pose $U = e^X$, $V = \mathbf{1}_{\{0<X<1\}}$ et $W = X\mathbf{1}_{\{0<X<1\}}$. Trouver les lois de U, V et W.

Exercice 12 Soit $X \sim \mathcal{U}([-1, 3])$. On pose $Y = |X|$. Trouver la fonction de répartition et la densité de Y.

Exercice 13 Soient $n \geq 1$ un entier fixé et p_1, p_2, p_3 trois réels positifs. On note

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j} & \text{si } i + j \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. À quelle condition sur p_1, p_2, p_3 existe-t-il un couple (X, Y) tel que $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_{i,j}$.
2. Déterminer les lois de X et de Y.

Exercice 14 Le couple aléatoire (X, Y) a la densité, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = cy\mathbf{1}_{[0,2]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y).$$

1. Calculer la constante c.
2. Trouver les densités marginales de X et de Y.
3. Mêmes questions pour

$$g(x, y) = c(x + 2y)e^{-2x-y}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(y).$$

4. Mêmes questions encore pour

$$h(x, y) = c\exp\left(-\frac{x^2 + 2xy + 4y^2}{8}\right).$$

Exercice 15 (Fonctions de répartition**)
Soit X une v.a. réelle définie sur un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de fonction de répartition F. On se propose de construire une v.a. Y sur l'espace $(]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ de même fonction de répartition que X, où λ mesure de Lebesgue sur $(]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[))$.

Pour $x \in]0, 1[$, on pose

$$Y(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} : F(y) \geq x\}.$$

1. On suppose que la loi de X admet une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) strictement positive.
   Montrer que $\forall x \in]0, 1[, \ Z(x) = Y(x) = F^{-1}(x)$.
   Montrer que $F(X)$ suit la loi uniforme sur $]0, 1[$ et que Y admet F comme fonction de répartition.
2. Cas général : Montrer que $\{y \in \mathbb{R} : F(y) \geq x\} = [Y(x), +\infty[$ et en déduire que Y a F pour fonction de répartition.

Exercice 16 (Variable aléatoire mixte) Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $[0, 1]$ et telle que $\mathbb{P}(X = 0) = 1/4$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et pour tout intervalle $[a, b] \subset]0, 1[$, on a

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \frac{b - a}{3}.$$

1. Déterminer p pour qu'on ait ainsi bien défini une loi de probabilité.
2. Exprimer la loi $\mathbb{P}_X$ sous la forme $\mathbb{P}_X = \mu_1 + \mu_2$ où μ_1 est une mesure discrète et μ_2 est une mesure à densité.
3. Calculer la fonction de répartition de X.
4. Calculer l'espérance et la variance de X.

Université de Rennes 1
UFR de Mathématiques

L3 Mathématiques
Probabilités
2016/2020

Fiche de TD n^0 2
Espérance, variance, moment, fonction caractéristique

Espérance, variance

Exercice 1 Soit U une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}(]0,1[)$. On considère $X = \left[\frac{1}{U}\right]$ où $[\cdot]$ désigne la fonction partie entière.

1. Montrer que X est une variable aléatoire discrète et donner sa loi.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $\{X \geq 100\}$.
3. La variable aléatoire X est-elle intégrable ?

Exercice 2 Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[|X|]$, $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{E}[e^{itX}]$ dans les cas suivants :

1. $\mathbb{P}_X(dx) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)dx$;
2. $\mathbb{P}_X(dx) = \exp(-(x^2-2x)/4)dx/(\sqrt[4]{e}\sqrt{4\pi})$.

Exercice 3 (Espérance, variance, moments) Soit X une variable aléatoire réelle de densité

$$f_X(x) = c\big(x\mathbf{1}_{[0,1]}(x) + (2-x)\mathbf{1}_{[1,2]}(x)\big).$$

Déterminer c et calculer les moments (signés) $\mu_n(X) = \mathbb{E}[X^n]$, $n \in \mathbb{N}^*$, de X et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 4 (Inverse de Cauchy) Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy de paramètre 1. Déterminer la loi de $Y = X^{-1}$.

Exercice 5 (Cauchy tronqué) Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy. Calculer $\mathbb{E}[\min(|X|, 1)]$.

Exercice 6 (Cadeau bonux) Une marque de lessive joint à chacun de ses paquets une carte d'un jeu de 52 cartes. On suppose le nombre de paquets infiniment grand et on note S le nombre de paquets à acheter pour avoir un jeu complet. Estimer l'espérance de S.

Indication. On posera X_k la variable égale au nombre de paquets à acheter pour avoir une carte différente des k distinctes déjà obtenues et on exprimera S en fonctions des X_k.

Exercice 7 (Couple de v.a.) Soit $U = (X, Y)$ une v.a. dans $\mathbb{R}^2$ de densité $(x, y) \mapsto ke^{-x}\mathbf{1}_{0<|y|<x}$.

1. Quelle est la valeur de k ?

2. Déterminer les lois marginales.
3. Quelle est la loi du vecteur $\left(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2}\right)$?

Exercice 8 (Couple gaussien) Soit

$$f(x,y) = C \exp\left(-\frac{x^2 + 2\alpha xy + y^2}{2}\right).$$

1. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction f peut-elle définir la densité d'un couple (X, Y) ? Déterminer alors la constante C.
2. Déterminer les lois de X et de Y.
3. Calculer $\mathbb{E}[XY]$ et $\mathrm{Var}(X+Y)$.

Exercice 9 (Tirages avec remise) Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On note $Y = \inf(X, n)$. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.
2. Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire successivement et avec remise à chaque fois une boule de l'urne et on cesse les tirages dès qu'une boule rouge est sortie. On désigne par Z le nombre de boules noires obtenues pendant l'expérience. Calculer $\mathbb{E}[Z]$ et $\mathrm{Var}(Z)$.

Exercice 10 (Moment et queue d'une loi) Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F_X.

1. Soit ϕ une fonction positive strictement croissante de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, nulle en 0. Montrer que
$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_0^{+\infty} \phi'(t)(1 - F_X(t))\, dt.$$
2. On suppose de plus que $\phi(X)$ est intégrable. Montrer que
$$\lim_{t \to +\infty} \phi(t)\mathbb{P}(X > t) = 0.$$
3. Expliciter le cas particulier $\phi(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4. On suppose maintenant que pour t assez grand, on a
$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{c}{t^\alpha}$$
où $c > 0$. Montrer que X admet un moment d'ordre k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k < \alpha$.

Exercice 11 (Moments et loi) Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Déterminer tous les moments $\mathbb{E}[X^n]$, $n \geq 1$, de X.
2. Trouver la densité f_Y de $Y = e^X$ et calculer les moments $\mu_n(Y) = \mathbb{E}[Y^n]$, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. On note Y_a, $|a| \leq 1$, la variable aléatoire de densité
$$f_{Y_a}(x) = f_Y(x)(1 + a \sin(2\pi \ln(x))).$$
Calculer les moments $\mu_n(Y_a) = \mathbb{E}[Y_a^n]$, $n \in \mathbb{N}^*$, de Y_a.
4. En déduire une conclusion intéressante.

Fonctions caractéristiques

Exercice 12 (Opérations sur les fonctions caractéristiques) Soit X une variable aléatoire de fonction caractéristique φ. On dit que X est de loi symétrique si la loi de $-X$ est la même que celle de X, *i.e.* $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(-X \in A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. Donner un exemple de loi symétrique.
2. Montrer que si X est de loi symétrique ssi φ est à valeurs réelles.
3. Soit Y une variable aléatoire de même loi que X mais indépendante de X. Donner, en fonction de φ, la fonction caractéristique de $X - Y$.
4. Soit U une variable indépendante de X et de loi $\mathbb{P}(U = 1) = \mathbb{P}(U = -1) = 1/2$. Donner, en fonction de φ, la fonction caractéristique de UX.
5. Soient φ et ψ deux fonctions caractéristiques et $p \in [0, 1]$. Montrer que $p\varphi + (1-p)\psi$ est encore une fonction caractéristique.

Exercice 13 ($\cos^n$) Montrer que la fonction $t \mapsto \cos^n t$ ($t \in \mathbb{R}, n \geq 1$ entier) est une fonction caractéristique.

Exercice 14 (Loi arithmétique) Une variable aléatoire X suit une loi arithmétique s'il existe $a \geq 0$ et $b > 0$ tels que X prenne ses valeurs dans le réseau $a + b\mathbb{Z}$, c'est à dire :

$$\mathbb{P}\big(X \in \{a + nb,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}\big) = 1.$$

1. On suppose que X suit une loi arithmétique. Montrer qu'il existe $c \neq 0$ tel que $|\varphi_X(c)| = 1$.
2. Réciproquement, s'il existe $c \neq 0$ tel que $|\varphi_X(c)| = 1$, on montre que X suit une loi arithmétique.
   (a) Montrer que si $|\varphi_X(c)| = 1$ alors l'argument de e^{icX} est ps constant.
   (b) En déduire que X suit une loi arithmétique.
3. S'il existe $c \neq 0$ et $c' \neq 0$ tels que $|\varphi_X(c)| = |\varphi_X(c')| = 1$ avec $c'/c \notin \mathbb{Q}$, montrer que X est ps constante.

Exercice 15 (Dérivabilité en 0 de la fonction caractéristique)
On considère une variable aléatoire X de support $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ et loi donnée par

$$p_n = p_{-n} = \frac{c}{n^2 \ln(n)},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad p_{-1} = p_0 = p_1 = 0$$

c'est-à-dire $\mathbb{P}_X = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{c}{n^2 \ln(n)}(\delta_n + \delta_{-n})$ (où c est une constante qu'on ne demande pas de préciser).

1. Justifier qu'on définit bien de cette façon une loi de probabilité.

2. Montrer que la fonction caractéristique φ_X de X s'exprime sous la forme

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2c(1 - 2\sin^2(nt/2))}{n^2 \ln(n)}.$$

3. Soit, pour $N \geq 2$,

$$f_N(t) = \sum_{2 \leq n \leq N} \frac{\sin^2(nt/2)}{tn^2 \ln(n)}, \quad g_N(t) = \sum_{n > N} \frac{\sin^2(nt/2)}{tn^2 \ln(n)}.$$

   (a) Exprimer $\frac{\varphi_X(t) - t}{t}$ à l'aide de $f_N(t)$ et de $g_N(t)$.

   (b) Montrer que $|f_N(t)| \leq \frac{|t|N}{4 \ln 2}$.

   (c) Montrer que $|g_N(t)| \leq \frac{1}{|t|N \ln(N)}$.

4. Trouver une fonction $t \mapsto N(t) \in [0, +\infty[$ telle que $\lim_{t \to 0} f_{N(t)}(t) = 0$ et $\lim_{t \to 0} g_{N(t)}(t) = 0$.

5. En déduire que φ est dérivable en 0 et formuler une remarque pertinente.

Fiche de TD n^0 3 : Indépendance

Exercice 1 *Une maladie affecte* 0.5% *de la population. Un test* T *permet de dépister cette maladie avec la fiabilité suivante :*

T est positif pour 95% des personnes affectées par la maladie
T est négatif pour 99% des personnes non affectées par la maldie.

1. *Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit affecté par la maladie.*
2. *Calculer la probabilité qu'un individu soit non malade quand le test est négatif*

Exercice 2

1. *On considère une variable X de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. Vérifier que la loi exponentielle satisfait la propriété d'absence de mémoire, ie*
$$\forall s, t > 0, \quad \mathbb{P}(X > t + s | X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$
2. *Soit X une variable positive à densité satisfaisant la propriété d'absence de mémoire. Montrer que X est de loi exponentielle dont on précisera le paramètre.*

Exercice 3 (Couple aléatoire) Soit $f(x,y) = Ce^{-x(1+y^2)}$ définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

1. Calculer C pour que f soit la densité de probabilité d'un couple aléatoire (X,Y).
2. Exprimer les lois marginales.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Les variables aléatoires X, Y ont-elles une espérance ? Si oui, les calculer.
5. Reprendre avec $f(x,y) = \dfrac{\lambda}{x^2 y}\mathbf{1}_{x\geq 1}\mathbf{1}_{1/x\leq y\leq x}$

Exercice 4 (Min et max) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même fonction de répartition F. On note $U = \min_{1\leq i\leq n} X_i$ et $V = \max_{1\leq i\leq n} X_i$.

1. Calculer les fonctions de répartitions de U et V à l'aide de F.
2. Si F admet une densité f, montrer que U et V admettent des densités et les calculer.

Exercice 5 (Exponentielles) Un appareil électronique est composé de n éléments (montés en série) dont les durées de fonctionnement sont indépendantes et de lois exponentielles.

1. Déterminer la loi de la durée de fonctionnement de l'appareil.
2. Quelle est la probabilité que le composant n$^o i$ soit responsable de la défaillance ?

Exercice 6 (Tribu asymptotique) On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. On définit alors la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ par $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
Vérifier que $A_0 = \{X_n \to 0\}$, $A_1 = \{\limsup_n (X_n) < +\infty\}$ et $A_2 = \{\left(\frac{S_n}{n}\right)$ converge dans $\mathbb{R}\}$ sont des événements de la tribu asymptotique $\mathcal{F}^\infty$ associée à $(X_n)_{n\geq 1}$.

2. On suppose maintenant que les variables X_n sont indépendantes.
   (a) Que peut-on dire de $\mathbb{P}((X_n)$ converge $)$?
   (b) On suppose que X_n converge $\mathbb{P}-$presque surement vers une variable X. Que peut-on dire de X ?

Exercice 7 (Lemmes de Borel-Cantelli) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de même loi. Soit $p \geq 1$ et $c > 0$.

1. Montrer que si $\mathbb{E}[|X_0|^p] < \infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_n \{|X_n| > cn^{1/p}\}) = 0$.
2. Montrer la réciproque dans le cas indépendant.

Exercice 8 (Poisson composé) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et dans L^2. On considère N une variable aléatoire indépendante de loi $\mathcal{P}(\alpha)$ et on pose $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ (on convient que la somme est nulle si elle est vide).

1. Calculer l'espérance et la variance de Y.
2. Déterminer la fonction caractéristique de Y.
3. Reconnaitre la loi de Y lorsque $X_0 \sim \mathcal{B}(p)$.

Exercice 9 (Quotient d'exponentielles) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. On note $Z = {}^{X}\!/_{Y}$ et $U = \ln(X)$, $V = -\ln(Y)$.

1. Exprimer $\mathbb{P}(Z \leq t)$ à l'aide des variables aléatoires U et V.
2. Montrer que la densité de U est donnée par $f_U(x) = \exp(x - e^x)$.
3. En déduire la densité de V.
4. Montrer que $U + V$ admet pour densité $f_{U+V}(x) = {}^{e^{-x}}\!/_{(1+e^{-x})^2}$.
5. Calculer $\mathbb{P}(Z \leq t)$.

Exercice 10 (Sommes de variables aléatoires) Soient les variables aléatoires indépendantes X et Y. Calculer la loi de la somme $X + Y$ lorsque

1. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$.
2. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.
3. $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(n, \tau^2)$.
4. $X \sim \mathrm{Gamma}(p, \lambda)$ et $Y \sim \mathrm{Gamma}(q, \lambda)$.

Exercice 11 (Box-Muller) On considère un point (aléatoire) M du plan cartésien. On note (X, Y) ses coordonnées cartésiennes et (R, Θ) ses coordonnées polaires. Montrer que X, Y sont indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$ ssi R^2 et Θ indépendantes avec $R^2 \sim \mathcal{E}(1/2)$ et $\Theta \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$.

Exercice 12 (Loi beta) Soient $a, b > 0$. Désignons par Z_a, Z_b deux variables aléatoires indépendantes de lois respectivement $\mathrm{Gamma}(a, 1)$, $\mathrm{Gamma}(b, 1)$.

1. Trouver la densité du vecteur aléatoire $(U, V) = (Z_a + Z_b, {}^{Z_a}/_{Z_a+Z_b})$.
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ? (on dit que V suit une loi beta $B(a, b)$).

Exercice 13 (Bernstein) Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi.

1. Montrer que si X et Y sont deux variables normales centrées réduites alors $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.
2. *Théorème de Bernstein.* Réciproquement, on suppose que X et Y sont de carrés intégrables et que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes. On veut montrer que X et Y sont deux variables normales. Pour cela :
   (a) Montrer qu'on peut supposer que X et Y sont centrées et de variance 1.
   (b) Montrer que φ, la fonction caractéristique commune de X et de Y satisfait l'égalité : $\varphi(2t) = \varphi(t)^3\varphi(-t)$.
   (c) En utilisant la continuité de φ en 0, en déduire que φ ne s'annule nulle part.
   (d) On pose $\psi(t) = \varphi(t)/\varphi(-t)$. Montrer que $\psi(2t) = \psi(t)^2$.
   (e) En étudiant le comportement de φ au voisinage de 0, en déduire que $\psi(t) = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
   (f) En déduire que $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

Fiche de TD n^0 4 : Convergences probabilistes

Exercice 1 (Convergence en probabilité) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$, X et Y des v.a. réelles avec $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers X.

1. On suppose dans cette question que pour tout $n \geq 1$, $|X_n| \leq Y$ p.s.
   (a) Montrer que $|X| \leq Y$ p.s.
   (b) Montrer que si Y est bornée, alors $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X dans L^p, $\forall p \geq 1$.
2. Montrer que $\mathbb{E}[|X|] \leq \liminf \mathbb{E}[|X_n|]$. (Indic. Si $x \geq 0$ et $k \geq 0$, $x \geq \min(x, k)$).

Exercice 2 (Convergence de variables aléatoires exponentielles) Soit $(\theta_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} \theta_n = +\infty$. On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta_n)$.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité.
2. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle dans L^1 ?
3. Étudier la convergence presque sûre dans les deux cas suivants : $\theta_n = n$; $\theta_n = \ln n$.

Exercice 3 (Loi forte des grands nombres dans le cas L^4)

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et de même loi telles que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^4] < \infty$.
   Montrer que $\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ converge presque sûrement vers 0.
2. Montrer que dire si les v.a. X_n ne sont plus de même loi mais $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[X_n^4] < \infty$?

Exercice 4 (Théorème de Weierstrass) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et X_n une suite de v.a. à valeurs dans $[a, b]$, d'espérance x et de variance $\sigma_n^2(x)$. Montrer que si $\sigma_n^2(x)$ converge uniformément vers 0 sur l'intervalle $[a, b]$, alors $\mathbb{E}[f(X_n)] \to f(x)$ quand $n \to \infty$ uniformément sur [a,b].
2. On considère f continue sur $[0, 1]$. Déduire le théorème de Weierstrass de la question précédente.
   Indic : considérer $X_n = \frac{1}{n}(Y_1 + \ldots + Y_n)$ avec Y_i indépendantes de loi $\mathcal{B}(x)$.
3. Comment étendre le résultat précédent à n'importe quel intervalle $[a, b]$?

Exercice 5 (Lois binomiales) Soit $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.r. de loi binomiale $X_n \sim \mathcal{B}(n, \lambda/n)$. Montrer que X_n converge en loi. Préciser la limite.

Exercice 6 (Lois uniformes) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. de loi uniforme $X_n \sim \mathcal{U}(1, \ldots, n)$. Montrer que $\frac{X_n}{n}$ converge en loi. Préciser la limite.

Exercice 7 (Convergence du min de v.a.i. uniformes) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant toutes une loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose

$$M_n = \min(X_1, \ldots, X_n), \qquad U_n = nM_n.$$

1. Calculer les fonctions de répartition de M_n et U_n.
2. Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ converge en loi. Préciser la limite.
3. Étudier la convergence de M_n : en loi, en proba, p.s., dans L^p, dans L^∞.

Exercice 8 (Renormalisation et maximum de variables aléatoires *iid*, cas borné) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi avec un support borné. On note F leur fonction de répartition commune et $M_n = \max\big(X_1, \ldots, X_n\big)$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x < x_0,\ F(x) < 1, \quad \text{et} \quad F(x_0) = 1.$
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(M_n \in]a,b]\big) = 0$ si $b < x_0$ ou si $a \geq x_0$ et que la limite est égale à 1 si $a < x_0 \leq b$.
3. En déduire que M_n converge en loi vers x_0.

On suppose désormais $x_0 = 1$ et $F(x) = 1 - (1-x)^\alpha$ si $x \in [0,1]$ (où $\alpha > 0$).

4. Montrer que si $\alpha = 1$ les v.a. X_i sont uniformément distribuées sur $[0,1]$.
5. Soit $Z_n = n^{1/\alpha}(M_n - 1)$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n < x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exercice 9 (Renormalisation et maximum de variables aléatoires *iid*, cas non borné) Comme dans l'exercice 8, $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a. iid de fonction de répartition F. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) < 1$. On pose $M_n = \max\big(X_1, \ldots, X_n\big)$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(M_n > x) = 1$.
2. On suppose que les variables aléatoires X_i sont de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$ et on pose $Z_n = \theta M_n - \ln n$. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq x)$.
3. On suppose maintenant que les variables aléatoires X_i sont de loi de Cauchy $\mathcal{C}(\theta)$ et on pose $Z_n = {}^{\pi M_n}\!/_{n\theta}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq x) = \begin{cases} \exp(-x^{-1}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Indication. On utilisera l'identité trigonométrique

$$\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2.$$

Exercice 10 (Loi de Cauchy) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. *iid* de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$.

1. Déterminer la loi de $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.
2. La suite $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ converge-t-elle presque sûrement quand $n \to +\infty$?

Exercice 11 (LGN) Soit f une fonction continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = f(\lambda).$$

Exercice 12 (TCL et Poisson) En utilisant le TCL pour des variables aléatoires de Poisson $\mathcal{P}(1)$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 13 (Méthode de Monte-Carlo) Soit $\psi : [0,1] \to [0,1]$ mesurable et soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$I = \int_0^1 \psi(x)dx, \quad Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(U_{2k}) \geq U_{2k+1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la limite de $\bar{Y}_n := \frac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n)$.
2. *Méthode de Monte-Carlo :* On veut estimer I à l'aide de $\bar{Y}_n$ et l'erreur relative est

$$\varepsilon_n = \frac{|\bar{Y}_n - I|}{I}.$$

   Donner un majorant de $\mathbb{P}(\varepsilon_n > \alpha)$ en termes de α, I, n.
3. Supposons que des estimations ont permis par ailleurs de voir que $I > 0,5$. À partir de quelle valeur de n s'assure-t-on 19 chances sur 20 de faire une erreur relative inférieure à 1% en estimant I ?

Exercice 14 (δ-méthode) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable avec ϕ' continue en un point $m \in \mathbb{R}$.

1. Soient $\{c_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ une suite de réels strictement positifs, telle que $c_n \to +\infty$ et X une v.a. réelle, $\{X_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ une suite de v.a. telles que $c_n(X_n - m) \xrightarrow{\mathcal{L}oi} X$ quand $n \to +\infty$. Montrer que quand $n \to +\infty$

$$c_n(\phi(X_n) - \phi(m)) \xrightarrow{\mathcal{L}oi} \phi'(m)X.$$

   Indication. Commencer par montrer que $X_n \xrightarrow{proba} m$.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *iid* de variables aléatoires d'espérance m et de variance σ^2. On note $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ la moyenne empirique. Montrer que

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}) - g(m)) \xrightarrow{\mathcal{L}oi} \mathcal{N}\big(0, (\sigma g'(m))^2\big).$$

Exercice 15 (Central téléphonique) Un central téléphonique dessert 5000 abonnés. A un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 2% d'utiliser son téléphone et les appels des abonnés sont supposés indépendants. Quel nombre minimal d'appels doit pouvoir traiter simultanément le central pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à $2,5\%$?

Exercice 16 (La tour d'argent) Le restaurant *La tour d'argent* peut servir 75 repas. La pratique montre que 20% des clients ayant réservé ne viennent pas.

1. Le restaurateur accepte 90 réservations. Quelle est la probabilité qu'il se présente plus de 50 clients ?
2. Combien le restaurateur doit-il accepter de réservations pour avoir une probabilité supérieure ou égale à $0,9$ de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront ?

   Indication. La table de la loi normale centrée réduite donne

$$\mathbb{P}(N \leq 1,281) = 0,9, \quad N \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Fiche de TD n^0 5 : Vecteurs gaussiens

Exercice 1 (Vecteur gaussien 1) Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^t$ un vecteur gaussien de moyenne $m = (1, 0, -2)^t$ et de matrice de covariance

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. La loi $\mathbb{P}_X$ du vecteur $\mathbf{X}$ admet-elle une densité dans $\mathbb{R}^3$?
2. Dans quel espace vit le vecteur $\mathbf{X}$ (ie. le plus petit espace (affine) dans lequel $\mathbf{X}$ vit ; on pourra décrire ce support par une équation cartésienne) ?

Exercice 2 (Vecteur gaussien 2) On considère un vecteur gaussien $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^t$ de moyenne $(1, 0, 0)^t$ et de matrice de covariance

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier l'existence du vecteur $\mathbf{X}$.
2. Déterminer le support de $\mathbf{X}$.
3. Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que X_1 et $X_2 + \alpha X_3$ soient indépendants ? Si, oui déterminer α. Même question pour $\beta \in \mathbb{R}$ tel que X_2 et $X_1 + \beta X_3$ soient indépendants.
4. Soit $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$ où
$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Déterminer la loi de $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^t$. Que dire de Y_1 ? Donner la densité du couple (Y_2, Y_3).

Exercice 3 (Couple de variables aléatoires normales) Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite et $a > 0$ un réel. On pose

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } |X| \leq a, \\ -X & \text{si } |X| > a. \end{cases}$$

1. Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi normale centrée réduite.
2. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1 - 2\mathbb{E}[X^2 \mathbf{1}_{\{|X|>a\}}]$.
3. Montrer qu'il existe $a > 0$ de sorte que X et Y sont non corrélées.

4. Déterminer $X + Y$ en fonction de X et en déduire si le couple aléatoire (X, Y) est gaussien ou pas.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Commenter.

Exercice 4 (Lemme de Stein-Gauss)

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que
$$\mathbb{E}\big[f'(X) - Xf(X)\big] = 0 \tag{1}$$
pour toute fonction f continue, C^1 par morceaux telle que $\mathbb{E}[|f'(X)|] < +\infty$.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire vérifiant (1) pour toute fonction f continue, dérivable par morceaux telle que $\mathbb{E}[|f'(Y)|] < +\infty$ où $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Montrer que $\mathbb{E}[X^2] = 1$. En déduire l'existence des deux premiers moments de X.
   (b) Déduire de (1) une équation différentielle pour la fonction caractéristique φ_X de X.
   (c) En déduire que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 5 (Fonctionnelles de vecteur gaussien) Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien centré de matrice de covariance identité et $a = (a_1, a_2)$. Déterminer les lois des variables aléatoires
$$Y = \frac{a_1X_1 + a_2X_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad Z = \frac{X_1 + X_2X_3}{\sqrt{1 + X_3^2}}.$$
Indication : Utiliser les fonctions caractéristiques.