

ENS RENNES

RAPPORT DE STAGE

MARCHES ALÉATOIRES : MODÈLE DE PROIE ET
PRÉDATEURS ET MARCHES CONFINÉES DANS UN
CÔNE

Auteur :
Emile Breton

Encadrants :
Hélène Guérin
Kilian Raschel

19 juillet 2022

Table des matières

1	Introduction	1
2	Rappels et passage en temps continu	1
2.1	Processus de Markov et de Poisson	1
2.2	Fonctions harmoniques et sous-harmoniques	4
3	Modèle proie prédateur	4
3.1	Un premier cas	5
3.2	Capture indépendante	10
3.3	Capture non-indépendante	14
4	Marches aléatoires confinées dans un cône	16
4.1	Premières définitions	16
4.2	Propriétés asymptotiques	19
4.3	Classification des marches aléatoires	20
4.3.1	Modèle de Hadamard (1,2)	20
4.3.2	Modèle de Hadamard (2,1)	21
4.3.3	Théorème de classification des marches aléatoires	22
5	Retour aux marches aléatoires de proie et prédateurs	24
5.1	Un premier théorème	24
5.2	Un cas particulier en dimension 2	27
6	Conclusion	29
A	Annexe	31
A.1	Simulations numériques	31
A.2	La matrice cov est définie positive	32

Dans tout le rapport on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1 Introduction

On va ici s'intéresser à deux domaines particuliers des marches aléatoires. Tout d'abord on considérera la marche aléatoire de proie et de prédateurs où une proie et plusieurs prédateurs se déplacent sur un réseau. On s'intéressera aux différents cas présentés dans l'article de Bramson et Griffeath [2]. On étudiera le temps de capture, c'est à dire le premier instant où la proie rencontre un prédateur. Ensuite, on changera de point de vue en étudiant les marches aléatoires de dimension 3 confinées dans \mathbb{N}^3 et notamment la classification de celles-ci qui a été étudiée dans [1]. Enfin, on réutilisera les outils de cette dernière section pour faire le lien avec les proies et prédateurs en redémontrant certains théorèmes de [2].

2 Rappels et passage en temps continu

Afin d'étudier les marches aléatoires de proie et prédateurs, on a besoin de considérer des processus de Markov qui sont l'analogie en temps continu des chaînes de Markov, on introduit donc cette notion ici ainsi que quelques propriétés utiles. On introduit aussi la notion de fonctions harmoniques pour une fonction de poids donnée.

La plupart des définitions et propositions sont issues de [8] et [7].

On commence d'abord par un rappel sur la marche aléatoire simple dans \mathbb{Z}^d

Proposition 1

Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d , c'est à dire que si on note $e_k, k \in \{1, \dots, d\}$ les vecteurs unitaires pour la base canonique dans \mathbb{R}^d , pour tout n , $Z_n = Z_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i$ où les ξ_i sont i.i.d et suivent une loi uniforme sur $\{\pm e_k, 1 \leq k \leq d\}$ et Z_0 suit une loi μ quelconque. Alors, la marche aléatoire est transiente si $d \geq 3$ et récurrente si $d \leq 2$.

2.1 Processus de Markov et de Poisson

On commence par définir la notion de Q-matrice.

Définition 1

Soit $Q = (q_{i,j})_{(i,j) \in E^2}$ une matrice sur un espace d'états dénombrable E . On dit que Q est une Q-matrice si :

- $q_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \neq j$
- $\sum_{j \neq i} q_{i,j} < +\infty \quad \forall i \in E$
- $q_{i,i} = -\sum_{j \neq i} q_{i,j}$ de sorte que $\sum_j q_{i,j} = 0 \quad \forall i \in E$

Par la suite, on pourra interpréter $q_{i,j}$ comme le taux auquel on part de i pour aller en j et $-q_{i,i}$ comme le taux de quitter i .

On veut maintenant pouvoir considérer des chaînes de Markov en temps continu, par exemple on veut construire un mouvement aléatoire dont on veut connaître la position à n'importe quel instant et pas seulement à des instants dénombrables. On peut alors naïvement introduire une famille de variables aléatoires $(X(t))_{t \geq 0}$ appelé processus à valeurs dans un espace d'états dénombrable et essayer de déterminer des propriétés dessus. Cependant l'exploitation d'union non-dénombrable d'évènements rend ce procédé difficile. Pour contourner cela on va donc se limiter aux processus continus à droite, c'est à dire qu'ils vérifient pour tout $\omega \in \Omega$ et $t \geq 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$X_s(\omega) = X_t(\omega) \quad \text{pour } t \leq s \leq t + \epsilon.$$

De façon plus concrète, cela va induire que pour un processus continu à droite les instants auquel la position change sont dénombrables (mais peuvent être aléatoires). On peut donc numérotter les instants de sauts et les caractériser par une suite de variable aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en les construisant par

réurrence avec $T_1 = \inf\{t \geq 0, X(t) \neq X(0)\}$, puis $T_{k+1} = \inf\{t \geq T_k, X(t) \neq X(T_k)\}$.

On peut maintenant définir la notion de processus de Markov.

Définition 2

Soit $(X(t))_{t \geq 0}$ un processus continu à droite et à valeurs dans un espace d'états dénombrable E . On dit que $X(t)$ est un processus de Markov si $\forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < s < t, \forall x, y, x_1, \dots, x_n \in E$ on a :

$$\mathbb{P}(X(t) = y | X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n, X(s) = x) = \mathbb{P}(X(t) = y | X(s) = x).$$

De plus, si la quantité $\mathbb{P}(X(t) = y | X(s) = x)$ ne dépend de t et s que par la différence $t - s$, on dira que le processus est homogène.

À chaque processus de Markov, on va pouvoir associer une Q-matrice qui va représenter les taux de saut, que l'on appelle générateur infinitésimal et notée G . En effet, si on considère un processus de Markov $X(t)$, et que l'on note G sa Q-matrice alors $Q_{i,j}$ ($i \neq j$) représentera le "taux" auquel on passe de l'état i à l'état j et $Q_{i,i}$ le taux auquel on part de l'état i . De plus, dans le cas homogène, pour tout $t \geq 0$, on peut définir une matrice $P(t)$ par $P(t)_{i,j} = \mathbb{P}(X(t) = j | X(0) = i)$, on a alors $P(t) = e^{tQ}$ [8, Theorem 2.1.1, Theorem 2.8.2]. Illustrons ces définitions avec l'exemple de la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} .

Exemple 1 On considère $X(t)$ un processus de Markov dont le mouvement est défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (\Delta X) \quad & \text{au taux} \\ (\rightarrow) \quad & \frac{1}{2} \quad . \\ (\leftarrow) \quad & \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si on note $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les instants auxquels ont lieu les sauts, on a que $T_1 \sim \mathcal{E}(1)$ et $T_{n+1} - T_n \sim \mathcal{E}(1)$, c'est à dire qu'après un saut on attend un temps qui suit une loi exponentielle de paramètre 1 puis on refait un saut. Si on regarde ce qu'il se passe à l'instant 0, on a : $T_1 = \min(T^{1,1}, T^{1,2})$ où $T^{1,1} \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$ correspond au premier instant auquel le saut (\rightarrow) a lieu et $T^{1,2} \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$ et correspond au premier instant auquel le saut (\leftarrow) a lieu. Or comme $\mathbb{P}(T_1 = T^{1,1}) = \mathbb{P}(T_1 = T^{1,2}) = \frac{1}{2}$, à chaque saut on se déplace dans l'une des directions de façon équiprobable, par conséquent la chaîne incluse suit une marche aléatoire simple discrète sur \mathbb{Z} d'où la notion de marche aléatoire simple.

On peut aussi voir ici que la Q-matrice ou générateur infinitésimal G associé au processus $X(t)$ est donné par pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } |x - y| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Une autre façon de voir la marche aléatoire continue sur \mathbb{Z} , plus proche de la marche aléatoire discrète, est de l'écrire sous la forme suivante :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i,$$

où $(\xi)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a. i.i.d où $\xi_n \sim \frac{1}{2}\delta(-1) + \frac{1}{2}\delta(1)$ et $N(t)$ est une v.a. qui représente le nombre de sauts à l'instant t , le processus $(N(t))_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson.

Définition 3 [8]

On dit que le processus de Markov $(X(t))_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de taux λ si :

- il est à valeurs dans \mathbb{N}
- les temps entre ses instants de sauts donnés par $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$ sont indépendants et de loi $\mathcal{E}(\lambda)$
- sa chaîne incluse est donnée par $Y_n = n$.

On veut maintenant donner une définition équivalente de processus de Poisson, pour cela introduisons les notions d'accroissements indépendants et stationnaires.

Définition 4

Le processus $(X(t))_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants si pour tout $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, les v.a. $X(t_2) - X(t_1)$ et $X(t_4) - X(t_3)$ sont indépendantes. Le processus $(X(t))_{t \geq 0}$ est à accroissements stationnaires si pour $t > s$ la loi de $X(t) - X(s)$ ne dépend que de la différence $t - s$.

Proposition 2

De façon équivalente, $(X(t))_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de taux λ si :

- $X(0) = 0$
- $X(t)$ est à accroissements indépendants et stationnaires
- Pour tout $t > 0$, $X(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt , i.e.

$$\mathbb{P}(X(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

On peut énoncer une propriété asymptotique des processus de Poisson qui sera utile par la suite.

Proposition 3

Soit $(N(t))_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de taux λ , alors :

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \lambda.$$

Démonstration. On considère la suite de v.a. $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $i \geq 1$ par $Y_i = N(i) - N(i-1)$ alors par définition du processus de Poisson, les Y_i sont i.i.d de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. De plus, $N(\lfloor t \rfloor) = \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} Y_i$. On a alors par la loi des grands nombres :

$$\frac{N(\lfloor t \rfloor)}{\lfloor t \rfloor} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \lambda.$$

De plus, $\lfloor t \rfloor \leq t \leq \lfloor t \rfloor + 1$ d'où comme $N(t)$ est croissant :

$$\frac{N(\lfloor t \rfloor)}{t} \leq \frac{N(t)}{t} \leq \frac{N(\lfloor t \rfloor + 1)}{t}.$$

D'où par encadrement on a le résultat. □

Une fois les notions de processus de Markov et de Poisson introduites, on peut comme dans le cas discret introduire la notion de propriété de Markov forte. Pour cela, on doit d'abord introduire la notion de temps d'arrêt.

Définition 5

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une famille de sous-tribus de \mathcal{F} . On dira que $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration si $\forall s < t \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Soit T une v.a. réelle. On dit que T est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$:

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

On dira que T est un temps d'arrêt de $X(t)$ si $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ et simplement que T est un temps d'arrêt lorsque $X(t)$ est implicite.

On peut alors énoncer la propriété de Markov forte comme dans le cas discret.

Théorème 1 (Propriété de Markov forte)[8, Theorem 2.8.1]

Soit $(X(t))_t$ un processus de Markov et T un temps d'arrêt.

La loi de $(X(T+t))_{t \geq 0}$ sachant $X(T) = x$ est celle de $(X(t))_{t \geq 0}$ sachant $X_0 = x$ et est indépendante de $(X(s))_{s \leq T}$.

On veut s'intéresser à la notion de récurrence et de transience comme dans le cas discret, pour cela on va se ramener à une chaîne de Markov discrète grâce à la notion de chaîne incluse.

Définition 6

Soit $(X(t))_t$ un processus de Markov et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ses instants de saut. La suite des v.a. définie par $Y_0 = X(0)$ et $Y_n = X_{T_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est alors appelée chaîne incluse, c'est une chaîne de Markov discrète. On dira qu'un état x est récurrent si $\mathbb{P}(\exists t > 0, X(t) = x | X(0) = x) = 1$, sinon on dira qu'il est transient. On dit que le processus X_t est récurrent si tous les états le sont. De même, on dit qu'il est transient si tous les états le sont.

Proposition 4 [8, Theorem 3.4.1]

Soit $(X(t))_t$ un processus de Markov et $(Y_n)_n$ sa chaîne incluse. Si un état x est récurrent (resp. transient) pour la chaîne $(Y_n)_n$ alors x est récurrent (resp. transient) pour le processus $(X(t))_t$.

2.2 Fonctions harmoniques et sous-harmoniques

On se donne X un ensemble quelconque.

Définition 7

On dit qu'une fonction $\lambda : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de poids si :

- Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{y \in X; \lambda(x, y) \neq 0\}$ est fini,
- $\lambda \geq 0$,
- Pour tout $x \in X$, $\sum_{y \in X} \lambda(x, y) > 0$.

Pour une fonction de poids λ et une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, on définit le laplacien associé à λ par :

$$\Delta f(x) = \Delta_\lambda f(x) := \sum_{y \in X} \lambda(x, y)(f(x) - f(y)), \quad x \in X$$

On dira que f est λ -sous-harmonique si $\Delta f \geq 0$ et λ -harmonique si $\Delta f = 0$. Parfois on dira simplement que f est sous-harmonique ou harmonique si la fonction de poids du laplacien est claire. Pour une fonction de poids λ donnée, on peut définir la frontière ∂X de X donnée par $\partial X = \{x \in X; \lambda(x, y) = 0 \quad \forall y \in X, y \neq x\}$. On dira alors que X est connecté à sa frontière si pour tout $a \in X$ il existe $y \in \partial X$, $k \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_k \in X$ tels que $\lambda(a, x_1)\lambda(x_1, x_2) \dots \lambda(x_{k-1}, x_k)\lambda(x_k, y) > 0$.

Proposition 5 [6, Proposition 3.1]

Si X est fini et connecté à sa frontière alors pour toute fonction sous-harmonique $u : \sup_{x \in X} u(x) = \sup_{x \in \partial X} u(x)$.

3 Modèle proie prédateur

Introduisons maintenant proprement le modèle de proie et prédateurs. On va considérer N prédateurs et une proie qui se déplacent sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$. Pour cela, on va modéliser leurs mouvements par des chaînes de Markov à temps continu. On considère le $N + 1$ -uplet $(X_1(t), \dots, X_N(t), Y(t))$ où $X_k(t)$ et $Y(t)$ représentent respectivement la position du k -ème prédateur et la proie à l'instant t . Dans toute la suite on notera x_k et y la position du k -ème prédateur et de la proie à l'instant initial $t = 0$.

Aussi, dans certaines parties, on pourra considérer que l'un des prédateurs ou la proie suit une marche aléatoire simple, par cela on entend une marche aléatoire continue sur \mathbb{Z}^d où chaque saut est de longueur 1 et a lieu à un instant aléatoire et où la différence de temps entre chaque saut suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. De plus, lorsqu'il y a un saut, il peut se faire dans n'importe quelle direction de façon équiprobable de sorte que la chaîne incluse suive une marche aléatoire discrète symétrique sur \mathbb{Z}^d .

On veut étudier la notion de capture caractérisée par le fait qu'un prédateur et la proie se trouvent au même endroit au même moment, on peut alors introduire le temps de capture T :

$$T = \min\{t \geq 0, X_k(t) = Y(t) \quad \text{pour un certain } k\}.$$

De plus, il est vraisemblable de supposer qu'après la capture la proie et le prédateur qui l'a capturée vont suivre le même mouvement cela se traduit par la condition suivante :

$$\mathbb{P}(\forall t \geq T, X_k(t) = Y(t) \text{ pour un certain } k). \quad (1)$$

Dans toute la suite, on va s'intéresser aux propriétés de T .

Définition 8

On dit que la loi du $N + 1$ -uplet $(X_1(t), \dots, X_N(t), Y(t))$ est :

<u>infructueuse</u>	si	$\mathbb{P}(T = +\infty) > 0$
<u>fructueuse</u>	si	$\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$
<u>efficace</u>	si	$\mathbb{E}[T] < +\infty$
<u>rapide</u>	si	$\exists C > 0, \mathbb{P}(T > t) \leq e^{-Ct}, t$ suffisamment grand
<u>complète</u>	si	$\exists t, \mathbb{P}(T \leq t) = 1.$

Ces propriétés sont ici notées de la moins intéressante à avoir à la plus intéressante. Remarquons d'ailleurs qu'il y a une série d'implications (complète \Rightarrow rapide \Rightarrow efficace \Rightarrow fructueuse).

3.1 Un premier cas

On veut d'abord commencer par étudier un cas simple. On se place dans le cas $N = 2, d = 1$ et on suppose que les prédateurs entourent la proie i.e. $x_1 < y < x_2$. De plus, on va supposer que $Y(t)$ suit une marche aléatoire simple (de taux 1), indépendante de $(X_1(t), X_2(t))$.

On se donne des paramètres α, β vérifiant $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ et $\alpha + \beta \leq 1$. Le mouvement de $(X_1(t), X_2(t))$ est alors caractérisé par les sauts suivants :

$(\Delta X_1, \Delta X_2)$	au taux
$(\rightarrow, \rightarrow)$	$\frac{1}{2}\alpha$
(\leftarrow, \leftarrow)	$\frac{1}{2}\alpha$
$(\rightarrow, \leftarrow)$	$\frac{1}{2}\beta$
$(\leftarrow, \rightarrow)$	$\frac{1}{2}\beta$
(\quad, \rightarrow)	$\frac{1}{2}(1 - \alpha - \beta)$
(\quad, \leftarrow)	$\frac{1}{2}(1 - \alpha - \beta)$
(\rightarrow, \quad)	$\frac{1}{2}(1 - \alpha - \beta)$
(\leftarrow, \quad)	$\frac{1}{2}(1 - \alpha - \beta)$

(2)

On peut voir le mouvement de la façon suivante, comme on a 8 mouvements possibles, chaque mouvement potentiel peut être associé à un temps auquel ce mouvement est effectué. On considère alors le mouvement qui a lieu en premier et après cela tout se passe comme si les temps repartaient de 0. On tire 8 lois exponentielles de paramètres différents, on regarde celle qui est la plus petite et on effectue le mouvement associé à celle-ci, une fois cela fait, on effectue le même procédé.

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 2 [2, Theorem 1]

Pour $x_1 < y < x_2$, lorsque le mouvement est caractérisé comme ci-dessus, la loi du triplet $(X_1(t), X_2(t), Y(t))$ est toujours fructueuse, et efficace dès que $\beta \neq 1$. De plus, on a :

$$\mathbb{E}[T] = \frac{(y - x_1)(x_2 - y)}{1 + \alpha - \beta}.$$

Enfin si $\alpha = 1$ alors la loi est rapide.

Avant la preuve de ce théorème, on annonce deux lemmes préliminaires qui seront utiles dans la preuve.

Lemme 1

Soit $T^{1,1}, \dots, T^{1,n}$ des v.a. indépendantes où pour tout k , $T^{1,k}$ suit une loi exponentielle de paramètre α_k et $T_1 = \min(T^{1,1}, \dots, T^{1,n})$. Alors, T_1 suit une loi exponentielle de paramètre $\sum_k \alpha_k$.

Démonstration. En effet, si on regarde la queue de la loi :

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(\forall k, T^{1,k} > t) \stackrel{\text{i.i.d.}}{=} \prod_k \mathbb{P}(T^{1,k} > t) = \prod_k e^{-\alpha_k t} = e^{-(\sum_k \alpha_k)t}$$

□

Lemme 2

Soit $T^{1,1}, \dots, T^{1,n}$ des v.a. indépendantes où pour tout k , $T^{1,k}$ suit une loi exponentielle de paramètre α_k et $T_1 = \min(T^{1,1}, \dots, T^{1,n})$. Alors, pour tout k , $\mathbb{P}(T_1 = T^{1,k}) = \frac{\alpha_k}{\sum_j \alpha_j}$.

Démonstration. On a pour k donné :

$$\mathbb{P}(T_1 = T^{1,k}) = \mathbb{P}(\forall j \neq k, T^{1,j} \geq T^{1,k}) = \mathbb{E} \left[\prod_j \mathbb{1}_{T^{1,j} \geq T^{1,k}} \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\prod_j \mathbb{1}_{T^{1,j} \geq T^{1,k}} \mid T^{1,k} \right] \right].$$

Or on a par indépendance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_j \mathbb{1}_{T^{1,j} \geq T^{1,k}} \mid T^{1,k} = t \right] &= \int_{t_1=t}^{+\infty} \cdots \int_{t_{k-1}=t}^{+\infty} \int_{t_{k+1}=t}^{+\infty} \cdots \int_{t_n=t}^{+\infty} \prod_{j \neq k} \alpha_j e^{-\alpha_j t_j} dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_n \\ &= \prod_{j \neq k} \int_t^{+\infty} \alpha_j e^{-\alpha_j t_j} dt_j \\ &= \prod_{j \neq k} e^{-\alpha_j t} = e^{-(\sum_{j \neq k} \alpha_j)t}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E} \left[\prod_j \mathbb{1}_{T^{1,j} \geq T^{1,k}} \mid T^{1,k} \right] = e^{-(\sum_{j \neq k} \alpha_j)T^{1,k}},$$

d'où :

$$\mathbb{P}(T_1 = T^{1,k}) = \mathbb{E} \left[e^{-(\sum_{j \neq k} \alpha_j)T^{1,k}} \right] = \int_0^{+\infty} e^{-(\sum_{j \neq k} \alpha_j)t} \alpha_k e^{-\alpha_k t} dt = \frac{\alpha_k}{\sum_j \alpha_j}$$

□

Passons maintenant à la démonstration du théorème.

Démonstration. Commençons par le cas $\alpha = 1$. Si $\alpha = 1$ alors le mouvement de $(X_1(t), X_2(t))$ est le suivant :

$$\begin{array}{ll} (\Delta X_1, \Delta X_2) & \text{au taux} \\ (\rightarrow, \rightarrow) & \frac{1}{2} \\ (\leftarrow, \leftarrow) & \frac{1}{2} \end{array}$$

Ces mouvements impliquent que la distance $X_2(t) - X_1(t)$ reste constante au cours du temps. Par conséquent, si on change de repère, on peut considérer que $X_1(t)$ et $X_2(t)$ restent fixe et que leurs mouvements sont en fait ceux de $Y(t)$. Par conséquent, si l'on ajoute à ça le fait que $Y(t)$ suive initialement une marche aléatoire simple de taux 1, au total on a que $Y(t)$ suit une marche aléatoire simple de taux 2 sur l'intervalle $[x_1, x_2]$. Par conséquent, sa chaîne incluse suit une marche aléatoire discrète sur \mathbb{Z} , elle est donc récurrent d'où $Y(t)$ aussi et ainsi $Y(t)$ atteint x_1 en temps fini presque sûrement i.e. $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$. Comme expliqué ci-dessus, tout se passe comme dans le cas d'un

problème de ruine du joueur où deux joueurs jouent le premier partant d'une mise de $y - x_1$ et le deuxième d'une mise de $x_2 - y$, ainsi on a donc (cf [5]) :

$$\mathbb{E}[T] = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{taux 2}} \underbrace{(y - x_1)(x_2 - y)}_{\substack{\text{espérance} \\ \text{ruine du joueur}}}.$$

Le fait que la loi est rapide est étudié dans [2], cependant cette démonstration n'étant pas claire, on choisira ici de ne pas la faire figurer.

On étudie maintenant le cas général. On va alors poser $L(t) = Y(t) - X_1(t)$ et $R(t) = X_2(t) - Y(t)$ les distances entre la proie et les prédateurs, on va s'intéresser aux "mouvements" des distances. Comme $Y(t)$ suit une marche aléatoire simple, l'évolution du couple $(L(t), R(t))$ est caractérisée par :

$(\Delta L, \Delta R)$	au taux
$(+1, -1)$	$\frac{1}{2}(\alpha + 1)$
$(-1, +1)$	$\frac{1}{2}(\alpha + 1)$
$(+1, +1)$	$\frac{1}{2}\beta$
$(-1, -1)$	$\frac{1}{2}\beta$
$(-1, 0)$	$\frac{1}{2}(1 - \alpha - \beta)$
$(+1, 0)$	$\frac{1}{2}(1 - \alpha - \beta)$
$(0, -1)$	$\frac{1}{2}(1 - \alpha - \beta)$
$(0, +1)$	$\frac{1}{2}(1 - \alpha - \beta)$

Ainsi, si on regarde uniquement les mouvements liés à $L(t)$ par exemple, on peut voir que $L(t)$ suit une marche aléatoire simple de taux 2. Ainsi, sa chaîne incluse suit une marche aléatoire discrète sur \mathbb{Z} et par récurrence de celle-ci, comme $T = \inf\{t \geq 0, L(t) = 0 \text{ ou } R(t) = 0\}$, on a $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ i.e. la loi est fructueuse.

On note $T^{1,1}, \dots, T^{1,n}$ (où $n = 8$, on conserve n par souci de généralité) les temps auxquels ont lieu pour la première fois les sauts définis ci-dessus suivant chacun une loi exponentielle de paramètre α_k qui est le taux associé au mouvement. Ainsi si on regarde le temps T_1 auquel a lieu le premier mouvement, il peut s'exprimer comme le minimum des temps i.e. $T_1 = \min(T^{1,1}, \dots, T^{1,8})$.

On veut maintenant déterminer la valeur de $\mathbb{E}[T]$. On considère d'abord le générateur infinitésimal G de $(L(t), R(t))$ dont les coefficients sont donnés par :

$$q_{(l,r)(l',r')} = q_{l-l', r-r'},$$

avec :

$$q_{-1,1} = q_{1,-1} = \frac{1 + \alpha}{2}, \quad q_{-1,-1} = q_{1,1} = \frac{\beta}{2}, \quad q_{-1,0} = q_{1,0} = q_{0,-1} = q_{0,1} = \frac{1 - \alpha - \beta}{2}$$

On considère ensuite les domaines :

$$D = \{(l, r); l > 0, r > 0\},$$

$$\partial D = \{(l, r); l = 0 \text{ ou } r = 0\}.$$

Pour $m(l, r) := \mathbb{E}[T | L(0) = l, R(0) = r]$, m est solution de :

$$\begin{aligned} Gm &= -1 \text{ sur } D \\ m &= 0 \text{ sur } \partial D. \end{aligned}$$

En effet, par définition de la capture si l ou r est nul alors $m = 0$. Montrons maintenant que $Gm = -1$. Pour simplifier, on va noter e_k le saut associé à $T^{1,k}$ de sorte que si avant un saut $(L(t), R(t)) = x$, après le saut $(L(t), R(t)) = x + e_k$. On note aussi $Z(t) = (L(t), R(t))$ et $(l, r) = x$. On note \mathbb{E}_x l'espérance associée à la probabilité $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}(\cdot | Z(0) = x)$. On a, comme $x \in D$, $T \geq T_1$ et donc :

$$m(x) = \mathbb{E}_x[T] = \mathbb{E}_x[T_1] + \mathbb{E}_x[T - T_1] = \mathbb{E}_x[T_1] + \sum_k \mathbb{E}_x[(T - T_1) \mathbf{1}_{T_1=T^{1,k}}],$$

avec $\mathbb{E}[T_1] = \frac{1}{\sum_j \alpha_j}$ Remarquons que les évènements suivants sont égaux :

$$\{Z(T_1) = x + e_k\} \cap \{Z(0) = x\} = \{Z(T_1) = x + e_k\} \cap \{T_1 = T^{1,k}\} = \{T_1 = T^{1,k}\} \cap \{Z(0) = x\}.$$

Ceci s'explique car le seul moyen d'aller de x en $x + e_k$ en un seul saut est de faire le saut lié au temps $T^{1,k}$. On a alors :

$$\mathbb{E}_x[(T - T_1) \mathbf{1}_{T_1=T^{1,k}}] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_x((T - T_1) \mathbf{1}_{T_1=T^{1,k}} > t) dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_x(T - T_1 > t, T_1 = T^{1,k}) dt.$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(T - T^{1,k} > t, T_1 = T^{1,k}) &= \mathbb{P}(T - T_1 > t, T_1 = T^{1,k} | Z(0) = x) \\ &= \mathbb{P}(T - T^{1,k} > t, Z(T_1) = x + e_k | Z(0) = x) \\ &= \mathbb{P}(T - T^{1,k} > t | Z(T_1) = x + e_k, Z(0) = x) \mathbb{P}(Z(T_1) = x + e_k | Z(0) = x) \end{aligned}$$

Mais de plus, par indépendance de $Z(0)$, T_1 et $T^{1,k}$, on a :

$$\mathbb{P}(Z(T_1) = x + e_k | Z(0) = x) = \mathbb{P}(T_1 = T^{1,k} | Z(0) = x) = \mathbb{P}(T_1 = T^{1,k}).$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}_x(T - T^{1,k} > t, T_1 = T^{1,k}) = \mathbb{P}(\forall T^{1,k} \leq s \leq t + T^{1,k}, Z(s) \neq 0 | Z(T_1) = x + e_k, Z(0) = x) \mathbb{P}(T_1 = T^{1,k}).$$

De plus, remarquons que T_1 est un temps d'arrêt de $X(t)$. En effet, on a pour tout k , $\{T_1 > t\} = \{\forall 0 \leq s \leq t, Z(s) = Z(0)\} \in \sigma\{Z(s), 0 \leq s \leq t\}$. Ici l'évènement $\{T_1 > t\}$ est l'évènement pour lequel $Z(s)$ n'a pas fait de mouvement jusqu'au temps t inclus.

Ainsi par propriété de markov forte appliquée au processus $Z(t)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(T - T^{1,k} > t, T_1 = T^{1,k}) &= \mathbb{P}(\forall 0 \leq s \leq t, Z(s) \neq 0 | Z(0) = x + e_k) \mathbb{P}(T_1 = T^{1,k}) \\ &= \mathbb{P}_{x+e_k}(T > t) \mathbb{P}(T_1 = T^{1,k}). \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{E}_x[(T - T_1) \mathbf{1}_{T_1=T^{1,k}}] = \mathbb{E}_{x+e_k}[T] \mathbb{P}(T_1 = T^{1,k}).$$

Ainsi,

$$m(x) = \frac{1}{\sum_j \alpha_j} + \sum_k m(x + e_k) \frac{\alpha_k}{\sum_j \alpha_j}.$$

Et $Gm(x) = \sum_k \alpha_k(m(x + e_k) - m(x))$, d'où :

$$Gm = -1 \quad \text{sur } D.$$

On pose $\bar{m}(l, r) := \frac{lr}{1+\alpha-\beta}$. On a alors pour tout $(l, r) \in D$, comme G vérifie $q_{(l,r),(l,r)} = -\sum_{(l',r') \neq (l,r)} q_{(l,r),(l',r')}$:

$$\begin{aligned} G\bar{m}(l, r) &= \sum_{(l',r')} q_{(l,r),(l',r')} m(l', r') = \sum_{(l',r') \neq (l,r)} q_{(l,r),(l',r')} (m(l', r') - m(l, r)) \\ &= \frac{1}{1+\alpha-\beta} \left(\frac{1+\alpha}{2} ((l+1)(r-1) + (l-1)(r+1) - 2lr) + \frac{\beta}{2} ((l-1)(r-1) + (l+1)(r+1) - 2lr) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\alpha-\beta}{2} ((l+1)r + (l-1)r + l(r+1) + l(r-1) - 4lr) \right) \\ &= -1. \end{aligned}$$

De plus, $\bar{m} = 0$ sur ∂D . Ici comme $G(\bar{m} - m) = 0$ sur D , on voudrait utiliser la Proposition 5 mais D n'est pas fini, on va donc introduire des domaines tronqués. On pose pour $n \geq 1$:

$$D_n = \{(l, r); l > 0, r > 0, l + r < n\},$$

$$\partial D_n = \{(l, r); l = 0 \text{ ou } r = 0 \text{ ou } l + r = n\}.$$

Ainsi que le temps de sortie correspondant et son espérance :

$$T_n = \inf\{t; (L(t), R(t)) \in \partial D_n\},$$

$$m_n = \mathbb{E}[T_n | L(0) = l, R(0) = r].$$

Par convergence monotone, comme $(T_n)_n$ est croissante, $m_n \rightarrow m$. De plus, on a toujours $Gm_n = -1$ sur D_n d'où $G(\bar{m} - m_n) = 0$ sur D_n et aussi $m_n - \bar{m} \leq 0$ sur ∂D_n .

On veut appliquer la Proposition 5, pour cela on commence par poser $\bar{D}_n = D_n \cup \partial D_n$. On voudrait considérer G comme fonction de poids mais G ne vérifie pas les hypothèses nécessaires, on pose donc \bar{G} définie par $\bar{G}(l, r)(l', r') = q_{(l,r),(l',r')}$ si $(l, r) \neq (l', r')$ et $\bar{G} = 0$ sinon. Ainsi \bar{G} est bien une fonction de poids et de plus $\Delta_{\bar{G}}m = Gm$. Remarquons de plus que $\partial \bar{D}_n = \partial D_n$ et que \bar{D}_n est connecté à sa frontière. Enfin $\Delta_{\bar{G}}(m_n - \bar{m}) = 0$ i.e. $m_n - \bar{m}$ est \bar{G} -harmonique, par la Proposition 5 on a alors :

$$\sup_{\bar{D}_n} (m_n - \bar{m}) = \sup_{\partial D_n} (m_n - \bar{m}) \leq 0.$$

Par conséquent, pour $(l, r) \in D$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(l, r) \in D_k$, en particulier, $\forall n \geq k$ $(l, r) \in D_n$ d'où :

$$\forall n \geq k \quad \bar{m}(l, r) - m_n(l, r) \geq 0,$$

d'où pour $n \rightarrow +\infty$:

$$\bar{m}(l, r) - m(l, r) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\bar{m}(l, r) - m_n(l, r)) \geq 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $(l, r) \in D$, on a $\bar{m} - m \geq 0$ sur D . On veut maintenant obtenir l'autre inégalité, pour ça on va introduire la fonction, pour $\epsilon > 0$:

$$\phi(l, r) = lr(l+r)^\epsilon.$$

On veut montrer que pour tout $(l, r) \in D$, $G\phi(l, r) \leq 0$ pour un epsilon suffisamment petit. On a d'abord :

$$\begin{aligned} G\phi &= \frac{1+\alpha}{2} \left((l+1)(r-1) + (l-1)(r+1) - 2lr \right) (l+r)^\epsilon \\ &\quad + \frac{\beta}{2} \left((l+1)(r+1)(l+r+2)^\epsilon + (l-1)(r-1)(l+r-2)^\epsilon - 2lr(l+r)^\epsilon \right) \\ &\quad + \frac{1-\alpha-\beta}{2} \left([(l+1)r + l(r+1)](l+r+1)^\epsilon + [(l-1)r + l(r-1)](l+r-1)^\epsilon - 4lr(l+r)^\epsilon \right) \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $l = r = 1$, on a :

$$G\phi(1, 1) = \frac{1+\alpha}{2} \left(-2 \times 2^\epsilon \right) + \frac{\beta}{2} \left(4 \times 4^\epsilon - 2^\epsilon \right) + \frac{1-\alpha-\beta}{2} \left(4 \times 3^\epsilon - 4 \times 2^\epsilon \right).$$

Ainsi lorsque ϵ tend vers 0, $G\phi(1, 1) \rightarrow -1 - \alpha + \beta$ cette quantité est strictement négative dès que $\beta < 1$, par continuité en ϵ de la fonction $\epsilon \mapsto G\phi(1, 1)$, pour un $\epsilon = \epsilon_1$ suffisamment petit, $G\phi(1, 1) \leq 0$. On se place maintenant de le cas $l + r > 2$. En factorisant par $(l + r)^\epsilon$ dans l'expression de $G\phi$ on a :

$$\begin{aligned} G\phi = & (l+r)^\epsilon \left(\frac{1+\alpha}{2} \left((l+1)(r-1) + (l-1)(r+1) - 2lr \right) \right. \\ & + \frac{\beta}{2} \left((l+1)(r+1) \left(1 + \frac{2}{l+r} \right)^\epsilon + (l-1)(r-1) \left(1 - \frac{2}{l+r} \right)^\epsilon - 2lr \right) \\ & \left. + \frac{1-\alpha-\beta}{2} \left([(l+1)r + l(r+1)] \left(1 + \frac{1}{l+r} \right)^\epsilon + [(l-1)r + l(r-1)] \left(1 - \frac{1}{l+r} \right)^\epsilon - 4lr \right) \right). \end{aligned}$$

Or si on considère la fonction $u \mapsto (1+u)^\epsilon$, celle-ci est développable en série entière sur le disque de rayon 1, et on a :

$$(1+u)^\epsilon = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon(\epsilon-1) \cdots (\epsilon-n+1)}{n!} u^n = 1 + \epsilon u + f(u, \epsilon), \quad (3)$$

où pour tout u , $f(u, \cdot)$ est une fonction continue qui tend vers 0 lorsque ϵ tend vers 0. Dans la suite on notera $o(1)$ une fonction continue qui tend vers 0 lorsque ϵ tend vers 0, on a directement pour tout u , $f(u, \cdot) = o(1)$. On a donc pour tout (l, r) tel que $l + r > 2$:

$$\begin{aligned} G\phi = & (l+r)^\epsilon \left(\frac{1+\alpha}{2} \left((l+1)(r-1) + (l-1)(r+1) - 2lr \right) \right. \\ & + \frac{\beta}{2} \left((l+1)(r+1) \left(1 + \frac{2}{l+r} + o(1) \right) + (l-1)(r-1) \left(1 - \frac{2}{l+r} + o(1) \right) - 2lr \right) \\ & \left. + \frac{1-\alpha-\beta}{2} \left([(l+1)r + l(r+1)] \left(1 + \frac{1}{l+r} + o(1) \right) + [(l-1)r + l(r-1)] \left(1 - \frac{1}{l+r} + o(1) \right) - 4lr \right) \right). \end{aligned}$$

On a alors, après avoir développé :

$$G\phi(l, r) = (l+r)^\epsilon (-1 + \epsilon + (1+\epsilon)(\beta - \alpha) + o(1)).$$

Pour ϵ suffisamment petit et $\beta < 1$ (par exemple si $\epsilon = \epsilon_2 \leq \frac{1+\alpha-\beta}{2(1+\beta-\alpha)}$) on a $G\phi \leq 0$. Quitte à prendre $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$, on a $G\phi \leq 0$ sur D . On pose ensuite :

$$\bar{m}_n(l, r) = \bar{m}(l, r) - \frac{\phi}{(1+\alpha-\beta)n^\epsilon}.$$

On a alors que $\bar{m}_n - m \leq 0$ sur ∂D_n et $G(\bar{m}_n - m) \geq 0$ sur D_n donc $\bar{m}_n - m$ est \bar{G} -harmonique sur \bar{D}_n , par conséquent on a $\bar{m}_n - m \leq 0$ sur D_n . Ainsi, comme $\bar{m}_n \rightarrow \bar{m}$, pour $(l, r) \in D$:

$$\bar{m}(l, r) - m(l, r) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\bar{m}_n(l, r) - m(l, r)) \leq 0.$$

On a donc : $m = \bar{m}$ sur D i.e. $\mathbb{E}[T|L(0) = l, R(0) = r] = \frac{lr}{1+\alpha-\beta}$. □

3.2 Capture indépendante

Après avoir étudié ce cas particulier, intéressons-nous au cas où les N prédateurs $(X_1(t), \dots, X_N(t))$ et la proie $Y(t)$ suivent tous des marches aléatoires simples sur \mathbb{Z}^d et indépendantes tant que la proie et un prédateur ne se trouvent pas au même endroit. On suppose de plus, pour éviter les cas triviaux, que les positions initiales vérifient pour tout $1 \leq k \leq N$, $x_k \neq y$. On peut alors énoncer le théorème suivant.

Théorème 3 [2, Theorem 2]

1. Pour $d \geq 3$, pour tout $N \geq 1$ et toutes positions initiales, la loi du $N + 1$ -uplet est infructueuse.
2. Pour $d = 2$, pour tout $N \geq 1$ et toutes positions initiales, la loi du $N + 1$ -uplet est fructueuse mais pas efficace.
3. Pour $d = 1$, pour tout $N \geq 2$, si il existe deux prédateurs entourant la proie au départ i.e. $x_k < y < x_j$ pour un certain k et j alors la loi du $N + 1$ -uplet est fructueuse et efficace.

Démonstration. **1.** On fixe y la position de départ de la proie. Soit \mathbb{P}_x la probabilité liée à une marche aléatoire simple $Z(t)$ commençant en x . Comme $d \geq 3$ la marche aléatoire est transiente, par conséquent, on peut choisir x suffisamment éloigné de sorte que (cf [11, P3, p.293]) :

$$\mathbb{P}_x(Z(t) = y \text{ pour un certain } t \geq 0) < \frac{1}{N}. \quad (4)$$

On pose alors G l'évènement :

$$G = \left(\bigcap_{k=1}^N \{X_k(1) = x, X_k(t) \neq y, \forall t \leq 1\} \right) \cap \{Y(t) = y, \forall t \leq 1\}.$$

Remarquons que $\mathbb{P}(G) > 0$, en effet, l'évènement G est une intersection d'évènements indépendants par indépendance entre les mouvements des prédateurs et de la proie. Tout d'abord, on a : $\mathbb{P}(Y(t) = y, \forall t \leq 1) > 0$ car le premier instant de saut de $Y(t)$ peut être strictement supérieur à 1 avec une proba non-nulle. De même, si on considère $\mathbb{P}(X_k(1) = x, X_k(s) \neq y, \forall 0 \leq s \leq t)$, comme $X_k(t)$ suit une marche aléatoire, tous les états communiquent entre eux (i.e. pour la chaîne incluse tous les états communiquent entre eux) , par conséquent la probabilité d'atteindre x est non-nulle. Plus précisément, on peut se déplacer dans chaque direction, on peut ainsi considérer un chemin qui a une probabilité non-nulle et qui contourne un point. De plus, comme $X_k(s)$ est une marche aléatoire continue, on peut faire autant de sauts que l'on veut entre $t = 0$ et $t = 1$ de sorte que l'on peut rejoindre l'état x depuis l'état x_k entre 0 et 1. De plus, on peut aisément prendre un chemin reliant x à x_k qui ne passe pas par y , par exemple en considérant un chemin qui se dirige vers x_k en faisant d'abord coïncider la première coordonnée, puis successivement les autres coordonnées en prenant soin, si l'on arrive proche de y , de le contourner. La probabilité de cet évènement est donc non-nulle. Enfin, par indépendance mutuelle de $X_1(t), \dots, X_N(t), Y(t)$, la probabilité de G est un produit de probabilité non-nulle.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = +\infty) &\geq \mathbb{P}(G \cap \{T = +\infty\}) = \mathbb{P}(G \cap \{\forall k, \forall t > 1 X_k(t) \neq Y(t)\}) \\ &= \mathbb{P}(\forall k, \forall t > 1, X_k(t) \neq Y(t) | G) \mathbb{P}(G) \\ &= \mathbb{P}(\forall k, \forall t > 1, X_k(t) \neq Y(t) | \{\forall k, X_k(1) = x, Y(1) = y\} \cap \{\forall k, \forall t < 1, X_k(t) \neq y, Y(t) = y\}) \mathbb{P}(G). \end{aligned}$$

Ainsi, par propriété de Markov :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = +\infty) &\geq \mathbb{P}(\forall k, \forall t > 0, X_k(t) \neq Y(t) | \forall k, X_k(0) = x, Y(0) = y) \mathbb{P}(G) \\ &= \mathbb{P}(T = +\infty | \forall k, X_k(0) = x, Y(0) = y) \mathbb{P}(G). \end{aligned}$$

Maintenant, comme pour tout l la loi de $X_l(t)$ sachant $X_l(0)$ est la même que celle de $X_1(t)$ sachant $X_1(0)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T < +\infty | \forall k, X_k(0) = x, Y(0) = y) &= \mathbb{P}(\exists k, \exists t \geq 0, X_k(t) = Y(t) | \forall k, X_k(0) = x, Y(0) = y) \\ &\leq \sum_{l=1}^N \mathbb{P}(\exists t, X_l(t) = Y(t) | \forall k, X_k(0) = x, Y(0) = y) \\ &= N \mathbb{P}(\exists t, X_1(t) = Y(t) | X_1(0) = x, Y(0) = y). \end{aligned}$$

Remarquons alors que $Z(t) := X_1(t) - Y(t) + y$ suit une marche aléatoire de taux 2 partant de x , on a alors, par l'équation (4) :

$$\mathbb{P}(\exists t, X_1(t) = Y(t) | X_1(0) = x, Y(0) = y) = \mathbb{P}(\exists t, Z(t) = y | Z(0) = x) < \frac{1}{N}.$$

En combinant les termes, on a :

$$\mathbb{P}(T = +\infty) \geq (1 - N \mathbb{P}(\exists t, X_1(t) = Y(t) | X_1(0) = x, Y(0) = y)) \mathbb{P}(G) > 0,$$

donc le $N + 1$ -uplet est infructueux.

2. Si on regarde un prédateur quelconque $X_k(t)$ alors la distance entre la proie et ce prédateur $X_k(t) - Y(t)$ (on peut supposer $X_k(t) > Y(t)$ sans perte de généralité) suit une marche aléatoire de taux 2 sur \mathbb{Z}^2 , comme celle-ci est récurrente on a : $\mathbb{P}(\exists t \geq 0, X_k(t) = Y(t)) = 1$ i.e. $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.

On considère toujours l'évènement G défini plus haut, on a alors pour $t > 1$, toujours par propriété de Markov :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > t) &\geq \mathbb{P}(G \cap \{T > t\}) = \mathbb{P}(G) \mathbb{P}(T > t | G) \\ &= \mathbb{P}(G) \mathbb{P}(\forall k, \forall 1 \leq s \leq t, X_k(s) \neq Y(s) | \{\forall k, X_k(1) = x, Y(1) = y\} \cap \{\forall k, \forall s < 1, X_k(s) \neq y, Y(s) = y\}) \\ &= \mathbb{P}(G) \mathbb{P}(\forall k, \forall 0 \leq s \leq t-1, X_k(s) \neq Y(s) | \forall k, X_k(0) = x, Y(0) = y). \end{aligned}$$

Si on note $A_k = \{\forall 0 \leq s \leq t-1, X_k(s) \neq Y(s)\}$, et $\mathbb{P}_y = \mathbb{P}(\cdot | Y(0) = y)$ et \mathbb{E}_y l'espérance associée, on a que la dernière probabilité ci-dessus vaut :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^N A_k | \forall k, X_k(0) = x, Y(0) = y\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\bigcap_k A_k} | \forall k, X_k(0) = x, Y(0) = y\right] \\ &= \mathbb{E}_y\left[\mathbb{E}_y\left[\mathbb{1}_{\bigcap_k A_k} | \forall k, X_k(0) = x, \sigma(Y(s), s \leq t-1)\right] | \forall k, X_k(0) = x\right]. \end{aligned}$$

Or, par indépendance des $X_k(t)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_y\left[\mathbb{1}_{\bigcap_k A_k} | \forall k, X_k(0) = x, \sigma(Y(s), s \leq t-1)\right] &= \mathbb{P}_y\left(\bigcap_k A_k | \forall k, X_k(0) = x, \sigma(Y(s), s \leq t-1)\right) \\ &\stackrel{\text{ii}}{=} \prod_{k=1}^N \mathbb{P}_y(A_k | X_k(0) = x, \sigma(Y(s), s \leq t-1)). \end{aligned}$$

Comme pour tout k , la loi de $X_k(t)$ sachant $X_k(0) = x$ est la même que celle de $X_1(t)$ sachant $X_1(0) = x$, on a :

$$\mathbb{E}_y\left[\mathbb{1}_{\bigcap_k A_k} | \forall k, X_k(0) = x, \sigma(Y(s), s \leq t-1)\right] = \mathbb{P}_y(A_1 | X_1(0) = x, \sigma(Y(s), s \leq t-1))^N.$$

D'où par l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^N A_k | \forall k, X_k(0) = x, Y(0) = y\right) &\leq \mathbb{E}_y[\mathbb{P}_y(A_1 | X_1(0) = x, \sigma(Y(s), s \leq t-1)) | X_1(0) = x]^N \\ &= \mathbb{P}(\forall s \leq t-1, X_1(s) \neq Y(s) | X_1(0) = x, Y(0) = y)^N \end{aligned}$$

Si on note $Z(t) = X_1(t) - Y(t)$ qui suit une marche aléatoire de taux 2, à deux dimensions l'asymptotique du temps d'atteinte $\tau = \inf\{t \geq 0, Z(t) = (0, 0)\}$ est donnée par [4] :

$$\mathbb{P}(\tau > t | Z(0) = z) \sim C_z \frac{1}{\log(t)}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

où C_z est une constante qui dépend de z . Ainsi, on a :

$$\mathbb{P}(\forall s \leq t-1, X_1(s) \neq Y(s) | X_1(0) = x, Y(0) = y) \sim C_{x-y} \frac{1}{\log(t-1)}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

donc :

$$\mathbb{P}(T > t) \geq \left(\frac{C_{x-y}}{\log(t-1)} \right)^N.$$

En intégrant on trouve $\mathbb{E}[T] = +\infty$ donc la loi du $N + 1$ -uplet n'est pas efficace.

3. Dans ce cas, si on regarde le triplet $(X_k(t), X_j(t), Y(t))$ tout se passe comme dans le cas du Théorème 2 lorsque $\alpha = \beta = 0$, par conséquent la loi du $N + 1$ -uplet est fructueuse et efficace. \square

Il y a un cas que ce théorème n'aborde pas, c'est le cas $d = 1$ mais où cette fois tous les prédateurs sont du même côté que la proie i.e. $x_k < y$ pour tout k (ou $x_k > y$ pour tout k). On regarde d'abord le cas $N = 2$. Ici on conserve le côté fructueux de la loi mais on perd l'efficacité, en effet :

$$\mathbb{P}(T > t) \geq \frac{c(y-x_1)(y-x_2)}{t} \quad \text{pour une certaine constante } c > 0.$$

En intégrant, on trouve finalement $\mathbb{E}[T] = +\infty$.

On va maintenant s'intéresser au cas $N = 3$ et voir que la aussi la loi du $N + 1$ -uplet n'est pas efficace.

Proposition 6 [2, Theorem 3]

Si $N = 3$ et pour tout k , $x_k < y$. Alors la loi du $N + 1$ -uplet n'est pas efficace.

Démonstration. On commence par noter $\bar{X}(t) = Y(t) - X_1(t)$, $\bar{Y}(t) = Y(t) - X_2(t)$ et $\bar{Z}(t) = Y(t) - X_3(t)$. On a alors le temps de capture qui est donné par :

$$T = \inf\{t \geq 0; \bar{X}(t) = 0 \text{ ou } \bar{Y}(t) = 0 \text{ ou } \bar{Z}(t) = 0\}$$

On considère alors le générateur G du triplet $(\bar{X}(t), \bar{Y}(t), \bar{Z}(t))$ dont les taux de saut sont donnés par :

$$q_{(x,y,z),(x',y',z')} = q_{x-x',y-y',z-z'},$$

avec :

$$q_{1,1,1} = q_{-1,-1,-1} = q_{1,0,0} = q_{-1,0,0} = q_{0,1,0} = q_{0,-1,0} = q_{0,0,1} = q_{0,0,-1} = \frac{1}{2}$$

et les autres $q_{(x,y,z),(x',y',z')}$ sont nuls.

Supposons par l'absurde que $m(x, y, z) := \mathbb{E}[T | \bar{X}(0) = x, \bar{Y}(0) = y, \bar{Z}(0) = z]$ soit fini en un point (x, y, z) . Alors, m est fini en tout point car $Gm = -1$, en particulier $m(1, 1, 1)$ est fini. On pose ensuite $D, \partial D, D_n, \partial D_n$ comme dans la démonstration du Théorème 2 (en prenant en compte le fait qu'on ait un triplet et pas un couple). Pour $n \geq 1, \epsilon > 0, \delta > 0$, on pose :

$$\psi_{n,\epsilon,\delta}(x, y, z) = \frac{1}{12\delta} \left(\left(\frac{1}{2} - \delta \right) (x + y + z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \right) \left(1 - \left(\frac{x + y + z}{n} \right)^\epsilon \right).$$

On a déjà que $\psi_{n,\epsilon,\delta} \leq 0$ sur D_n . Ensuite, en calculant $G\psi_{n,\epsilon,\delta}$ puis en factorisant par $(x + y + z)^\epsilon$ et en linéarisant comme dans la démonstration précédente, on obtient :

$$G\psi_{n,\epsilon,\delta} = -1 + \frac{(x + y + z)^\epsilon}{12\delta n^\epsilon} (12\delta + \epsilon(24\delta - 4) + o(1)),$$

où $o(\epsilon)$ tend vers 0 uniformément en (x, z, y) lorsque ϵ tend vers 0. Comme ϵ est libre, on peut se donner un $\epsilon = \epsilon(\delta)$ suffisamment petit de sorte que :

$$(12\delta + \epsilon(24\delta - 4) + o(1)) \geq 0 \quad \text{sur } D_n.$$

Et donc $G\psi_{n,\epsilon,\delta} \geq -1$ sur D_n , d'où $G(\psi_{n,\epsilon,\delta} - m) \leq 0$ sur D_n . On a aussi $\psi_{n,\epsilon,\delta} - m \leq 0$ sur ∂D_n . Ainsi, si on considère comme dans le théorème précédent \bar{G} et \bar{D}_n on a que $\psi_{n,\epsilon,\delta} - m$ est sous-harmonique, par la proposition 5 on a alors $\sup_{\bar{D}_n} (\psi_{n,\epsilon,\delta} - m) = \sup_{\partial D_n} (\psi_{n,\epsilon,\delta} - m) \leq 0$, d'où $m \geq \psi_{n,\epsilon,\delta}$ sur D_n .

Or $\psi_{n,\epsilon,\delta}(1, 1, 1) = \frac{1}{12\delta} (-9\delta + 3) \left(1 - \left(\frac{3}{n} \right)^\epsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{3}{4} + \frac{1}{4\delta}$. Donc, $m(1, 1, 1) \geq -\frac{3}{4} + \frac{1}{4\delta}$ sur D . Ceci étant vrai pour tout δ , on a :

$$m(1, 1, 1) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} -\frac{3}{4} + \frac{1}{4\delta} = +\infty.$$

Ce qui est absurde. \square

Ainsi, après ce théorème, il resterait le cas $N \geq 4$ à traiter. Ce cas n'est pas démontré mais il a été étudié numériquement par BRAMSON et GRIFFEATH dans [2] ce qui a abouti à la conjecture que la loi du $N + 1$ -uplet est efficace dès lors que $N \geq 4$.

3.3 Capture non-indépendante

Après avoir étudié le cas où les mouvements étaient tous indépendants, on veut maintenant s'intéresser au cas où il y a une dépendance entre les mouvements, c'est à dire par exemple que lorsque la proie fait un saut, tous les prédateurs sautent dans la même direction. Pour cela, on considère toujours le $N + 1$ -uplet $(X_1(t), \dots, X_N(t), Y(t))$ qui va ici être une chaîne de Markov sur $(\mathbb{Z}^d)^{N+1}$ en temps continu dont les taux de saut seront donnés par $q_{(x_1, \dots, x_N, y)(x'_1, \dots, x'_N, y')}$. De plus, on va supposer que la proie et les prédateurs ont la même loi marginale qui est une chaîne de Markov de taux de saut $p(z, z')$. Enfin, on va supposer que q satisfait les conditions suivantes :

$$\sum_{x'_1, \dots, x'_N} q_{(x_1, \dots, x_N, y)(x'_1, \dots, x'_N, y')} = p(y, y'),$$

et :

$$\sum_{x'_j, j \neq i, y'} q_{(x_1, \dots, x_N, y)(x'_1, \dots, x'_N, y')} = p(x_i, x'_i).$$

Ces conditions nous donnent par exemple que les prédateurs peuvent baser leur prochain saut sur leur position actuelle, la position actuelle de la proie ainsi que le prochain saut de la proie. Lorsque la loi de $(X_1(t), \dots, X_N(t), Y(t))$ satisfait ces conditions on parlera d'une capture de Markov.

De plus, on supposera dans la suite que les lois marginales de la proie et des prédateurs sont des marches aléatoires.

Une fois ces conditions établies, on peut maintenant énoncer un théorème dans le cas $N = 1$.

Théorème 4 [2, Proposition 1]

Pour tout $d \geq 1$, si $N = 1$, pour toutes positions initiales, il existe une loi de $(X(t), Y(t))$ qui est fructueuse mais aucune n'est efficace.

Démonstration. Commençons par construire la loi efficace, on se donne (x, y) les positions initiales. On note $(X^1(t), Y^1(t))$ les processus de la première coordonnée de $X(t)$ et $Y(t)$, et on laisse $X^1(t)$ et $Y^1(t)$ suivre des marches aléatoires de même taux et indépendantes. Pour les autres coordonnées on fait se déplacer la proie et le prédateur simultanément et dans la même direction. On a alors que $X^1(t) - Y^1(t)$ suit une marche aléatoire sur \mathbb{Z} , par récurrence de celle-ci, si on note $T^1 = \inf\{t \geq 0, X^1(t) = Y^1(t)\}$, on a $\mathbb{P}(T^1 < +\infty) = 1$.

Une fois que T^1 est atteint, on fait de même pour la deuxième coordonnée c'est à dire qu'on laisse $X^2(t)$ et $Y^2(t)$ suivre des marches aléatoires de même taux et indépendantes et que les autres coordonnées (y compris la première) se déplacent simultanément et dans la même direction. On a alors que $T^2 = \inf\{t \geq 0, X^2(t) = Y^2(t)\}$ vérifie aussi $\mathbb{P}(T^2 < +\infty) = 1$. On a ainsi, par construction : $X^1(T^2) = Y^1(T^2)$ et $X^2(T^2) = Y^2(T^2)$. En procédant ainsi pour chaque coordonnée, on obtient un temps d'arrêt T^d qui vérifie $X(T^d) = Y(T^d)$ et $\mathbb{P}(T^d < +\infty) = 1$.

On choisira ici de ne pas démontrer la deuxième partie du théorème, cependant cette démonstration est traitée dans [2]. \square

Contrairement au cas indépendant étudié dans la section précédente, on va ici pouvoir construire, pour un nombre de prédateurs suffisamment grand, une loi efficace.

Théorème 5 [2, Theorem 4]

En dimension d , il existe $C(d)$ tel que pour $N \geq C(d)$, pour toutes positions initiales, il existe une loi efficace.

Démonstration. On va construire une capture de Markov par récurrence, on commence dans le cas $d = 1$ et $N = 3$ prédateurs. On applique à $(X_1(t), X_2(t), X_3(t), Y(t))$ le mouvement suivant :

$$\begin{array}{ll}
(\Delta X_1, \Delta X_2, \Delta X_3, \Delta Y) & \text{au taux} \\
(, \rightarrow, \rightarrow; \rightarrow) & \frac{1}{6} \\
(, \leftarrow, \leftarrow; \leftarrow) & \frac{1}{6} \\
(\rightarrow, , \rightarrow; \rightarrow) & \frac{1}{6} \\
(\leftarrow, , \leftarrow; \leftarrow) & \frac{1}{6} \\
(\rightarrow, \rightarrow, ; \rightarrow) & \frac{1}{6} \\
(\leftarrow, \leftarrow, ; \leftarrow) & \frac{1}{6} \\
(\rightarrow, , ;) & \frac{1}{6} \\
(\leftarrow, , ;) & \frac{1}{6} \\
(, \rightarrow, ;) & \frac{1}{6} \\
(, \leftarrow, ;) & \frac{1}{6} \\
(, , \rightarrow;) & \frac{1}{6} \\
(, , \leftarrow;) & \frac{1}{6}
\end{array} \quad . \tag{5}$$

On rajoute de plus la condition que si l'un des prédateurs capture la proie alors ils suivent le même mouvement par la suite. On peut ici remarquer que les lois marginales des $X_k(t)$ et de $Y(t)$ sont bien des marches aléatoires, de taux $\frac{1}{2}$. On considère alors les processus des différences des distances entre les proies et les prédateurs :

$$\bar{X}(t) = Y(t) - X_1(t), \quad \bar{Y}(t) = Y(t) - X_2(t), \quad \bar{Z}(t) = Y(t) - X_3(t).$$

Le triplet $(\bar{X}(t), \bar{Y}(t), \bar{Z}(t))$ a alors les mouvements suivants :

$$\begin{array}{ll}
(\Delta \bar{X}, \Delta \bar{Y}, \Delta \bar{Z}) & \text{au taux} \\
(1, 0, 0) & \frac{1}{3} \\
(-1, 0, 0) & \frac{1}{3} \\
(0, 1, 0) & \frac{1}{3} \\
(0, -1, 0) & \frac{1}{3} \\
(0, 0, 1) & \frac{1}{3} \\
(0, 0, -1) & \frac{1}{3}
\end{array} \quad .$$

On a donc que $(\bar{X}(t), \bar{Y}(t), \bar{Z}(t))$ suit une marche aléatoire de taux 2 sur \mathbb{Z}^3 . En particulier, chaque coordonnée du triplet suit une marche aléatoire sur \mathbb{Z} de taux $\frac{2}{3}$ indépendamment des autres coordonnées. Ainsi, si on pose :

$$T = \inf\{t \geq 0, \bar{X}(t) = 0 \text{ ou } \bar{Y}(t) = 0 \text{ ou } \bar{Z}(t) = 0\}.$$

Remarquons que T est aussi le temps de capture, on veut donc voir que $\mathbb{E}[T] < +\infty$. On a par indépendance et par asymptotique du temps de retour en 0 d'une marche aléatoire sur \mathbb{Z} (en prenant en compte que si \tilde{T} est le temps de retour en 0 d'une marche aléatoire simple continue sur \mathbb{Z} , $\mathbb{P}(\tilde{T} > t) = O(\frac{1}{\sqrt{t}})$ [11]) on a :

$$\mathbb{P}(T > t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{t^3}}\right) \quad t \rightarrow +\infty,$$

où C est une constante. Par conséquent, en intégrant on a $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

On va maintenant se placer en dimension $d = 2$ et on va considérer $N = 9$ prédateurs, on peut alors choisir de séparer arbitrairement les prédateurs en 3 groupes de 3 et pour chaque groupe $(X_{i,1}(t), X_{i,2}(t), X_{i,3}(t))$, on va considérer le processus de leur première coordonnée $(X_{i,1}^1(t), X_{i,2}^1(t), X_{i,3}^1(t))$ associé à chaque quadruplet $(X_{i,1}^1(t), X_{i,2}^1(t), X_{i,3}^1(t), Y^1(t))$ le mouvement (5), avec toujours la condition que si la première coordonnée d'un prédateur coïncide avec celle de la proie alors leurs premières coordonnées suivent le même mouvement par la suite. Si on note alors $\bar{X}_{i,j}^1(t) = Y(t) - X_{i,j}^1(t)$, chaque $\bar{X}_{i,j}^1(t)$ suit alors une marche aléatoire sur \mathbb{Z} de taux $\frac{8}{3}$. Concernant les deuxièmes coordonnées de la proie et de chaque prédateur, on suppose qu'elles bougent simultanément et dans la même direction. On peut alors considérer :

$$T^1 = \inf\{t \geq 0, \forall i, \exists j, \bar{X}_{i,j}^1(t) = 0\}$$

qui correspond au temps d'arrêt à partir duquel dans chaque groupe de prédateurs, la première coordonnée d'au moins un prédateur coïncide avec celle de la proie. On a ainsi :

$$\mathbb{P}(T^1 > t) = \mathbb{P}\left(\forall s \leq t, (\forall j, \bar{X}_{1,j}^1(s) \neq 0) \text{ ou } (\forall j, \bar{X}_{2,j}^1(s) \neq 0) \text{ ou } (\forall j, \bar{X}_{3,j}^1(s) \neq 0)\right)$$

c'est à dire que c'est la probabilité qu'au temps t il y a au moins un groupe dans lequel aucune première coordonnée d'un prédateur ne coïncide avec celle de la proie. On a donc, comme chaque groupe suit le même mouvement que celui explicité dans le cas $d = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T^1 > t) &\leq \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}\left(\forall s \leq t, \forall j, \bar{X}_{i,j}^1(s) \neq 0\right) \\ &= 3 \mathbb{P}\left(\forall s \leq t, \forall j, \bar{X}_{1,j}^1(s) \neq 0\right) \end{aligned}$$

Or, si on pose $T = \inf\{t \geq 0, \exists j, \bar{X}_{1,j}^1(t) = 0\}$ on a, comme dans le cas $d = 1$, $\mathbb{P}(T > t) = O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ d'où :

$$\mathbb{P}(T^1 > t) \leq O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$

Et ainsi $\mathbb{E}[T^1] < +\infty$.

Une fois que T^1 est atteint, on considère $\frac{N}{3} = 3$ prédateurs $(\tilde{X}_1(t), \tilde{X}_2(t), \tilde{X}_3(t))$ dont la première coordonnée coïncide avec celle de la proie. On sait qu'il y en a au moins 3 puisque T^1 est atteint donc il y en a au moins un par groupe. On applique alors aux secondes coordonnées $(\tilde{X}_1^2(t), \tilde{X}_2^2(t), \tilde{X}_3^2(t), Y^2(t))$ le mouvement (5) et on fait se déplacer les premières coordonnées simultanément et dans la même direction. On se retrouve alors dans le cas $d = 1$ et si on pose :

$$T^2 = \inf\{t \geq T^1, \tilde{X}_1^2(t) = Y(t) \text{ ou } \tilde{X}_2^2(t) = Y(t) \text{ ou } \tilde{X}_3^2(t) = Y(t)\},$$

on a alors $\mathbb{E}[T^2] < +\infty$. Ainsi, une fois que T^2 est atteint, par construction la position de l'un des prédateurs et de la proie coïncide.

Pour $d \geq 3$ on peut considérer $N = 3^d$ et itérer le raisonnement effectué dans le cas $d = 2$, c'est à dire qu'on considère $\frac{N}{3}$ groupes de 3 prédateurs puis on considère $\frac{N}{3}$ prédateurs dont la première coordonnée coïncide avec celle de la proie. On finit par obtenir un temps T^d qui vérifie $\mathbb{E}[T] < +\infty$ auquel la proie est capturée. □

4 Marches aléatoires confinées dans un cône

4.1 Premières définitions

Dans cette partie, on va s'intéresser à l'étude des marches aléatoires discrètes à 3D qui sont confinées dans \mathbb{N}^3 . Dans toute cette section, une marche aléatoire sera caractérisée par son espace de sauts noté

\mathcal{S} , où $\mathcal{S} \in \mathcal{P}(\{-1, 0, 1\}^3)$ et $(0, 0, 0) \notin \mathcal{S}$. On peut alors associer à cette marche aléatoire un polynôme caractéristique, aussi appelé inventaire et donné par :

$$\chi(x, y, z) := \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{S}} x^i y^j z^k.$$

Comme on a $(i, j, k) \in \{-1, 0, 1\}^3$ on peut alors réécrire χ sous les formes suivantes (avec $\bar{x} = \frac{1}{x}$, $\bar{y} = \frac{1}{y}$, $\bar{z} = \frac{1}{z}$:

$$\begin{aligned} \chi(x, y, z) &= \bar{x}A_-(y, z) + A_0(y, z) + xA_+(y, z) \\ &= \bar{y}B_-(x, z) + B_0(x, z) + yB_+(x, z) \\ &= \bar{z}C_-(x, y) + C_0(x, y) + zC_+(x, y). \end{aligned}$$

On peut alors considérer les applications de $(0, +\infty)^3$ dans $(0, +\infty)^3$:

$$\phi(x, y, z) = \left(\frac{A_-(y, z)}{A_+(y, z)}, y, z \right), \quad \psi(x, y, z) = \left(x, \frac{B_-(x, z)}{B_+(x, z)}, z \right), \quad \tau(x, y, z) = \left(x, y, \frac{C_-(x, y)}{C_+(x, y)} \right).$$

On peut remarquer que ϕ, ψ, τ sont des bijections, on considère alors le groupe de \mathcal{S} défini par $G = \langle \phi, \psi, \tau \rangle$.

On veut maintenant introduire une notion de dimension de la marche aléatoire à 3D. On considère une marche aléatoire d'espace des sauts \mathcal{S} et on regarde un chemin w de longueur n c'est à dire une succession de n sauts. Pour tout $s = (s_x, s_y, s_z) \in \mathcal{S}$, on note alors a_s la multiplicité de s c'est à dire le nombre de sauts s apparaissant dans le chemin w . On peut alors remarquer que le chemin reste dans l'octant \mathbb{N}^3 si et seulement si :

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} a_s s_x \geq 0, \quad \sum_{s \in \mathcal{S}} a_s s_y \geq 0, \quad \sum_{s \in \mathcal{S}} a_s s_z \geq 0. \quad (6)$$

En effet, la position finale du chemin w est donnée par : $(\sum_{s \in \mathcal{S}} a_s s_x, \sum_{s \in \mathcal{S}} a_s s_y, \sum_{s \in \mathcal{S}} a_s s_z)$ par conséquent, celle-ci est dans \mathbb{N}^3 si et seulement si la condition ci-dessus est vérifiée. On dira que la marche aléatoire est de dimension au plus $d \in \{0, 1, 2, 3\}$ s'il existe d inégalités de (6) tel que tout chemin satisfaisant ces d inégalités satisfait les 3.

On dira aussi que la marche aléatoire est de dimension $d \in \{1, 2, 3\}$ si elle est de dimension au plus d et si elle n'est pas de dimension au plus $d - 1$.

On énonce maintenant une hypothèse dans laquelle on se placera la plupart du temps.

H 1 On suppose que \mathcal{S} n'est inclus dans aucun demi-espace $E_x = \{y \in \mathbb{R}^3, \langle x, y \rangle \geq 0\}$ pour $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Cette hypothèse permet d'éviter de se limiter au cas où on peut, quitte à effectuer une rotation, se ramener à l'étude d'une marche aléatoire en dimension inférieure confinée dans un cône (qui peut être différent de \mathbb{N}^2 ou \mathbb{N}). Cette hypothèse sera nécessaire par la suite pour démontrer qu'une certaine matrice est définie positive. Remarquons par ailleurs que tout \mathcal{S} satisfaisant **H1** est de dimension 3. Afin d'illustrer toutes ces définitions commençons par un exemple simple.

Exemple 2 On considère la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^3 , son espace des sauts est donné par :

$$\mathcal{S} = \{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)\}.$$

Le polynôme caractéristique s'écrit alors :

$$\chi(x, y, z) = x + \bar{x} + y + \bar{y} + z + \bar{z}.$$

On peut alors voir que :

$$A_- = A_+ = B_- = B_+ = C_- = C_+ = 1.$$

D'où :

$$\phi(x, y, z) = (\bar{x}, y, z), \quad \psi(x, y, z) = (x, \bar{y}, z), \quad \tau(x, y, z) = (x, y, \bar{z}).$$

On a que ϕ, ψ et τ commutent donc G est commutatif. De plus, ϕ, ψ et τ sont d'ordre 2. On obtient donc un isomorphisme $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en associant :

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow (1, 0, 0) \\ \psi &\rightarrow (0, 1, 0) \\ \tau &\rightarrow (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Enfin, on peut voir que \mathcal{S} satisfait l'hypothèse **H 1** en effet, supposons qu'il existe $u = (u_x, u_y, u_z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{S} \subset E_u$, alors on a : $\langle u, (1, 0, 0) \rangle \geq 0$ et $\langle u, (-1, 0, 0) \rangle \geq 0$ c'est à dire $u_x \geq 0$ et $u_x \leq 0$ d'où $u_x = 0$. En procédant de même, on obtient $u_y = 0$ et $u_z = 0$ donc $u = 0$ ce qui est absurde. Ainsi, \mathcal{S} satisfait bien l'hypothèse.

Ensuite, à chaque marche aléatoire, on va associer un triangle sphérique qui nous sera utile par la suite. On commence par une proposition.

Proposition 7 [1, Theorem 3]

Soit \mathcal{S} un espace des sauts et χ son polynôme caractéristique. Il existe un unique triplet $(x_0, y_0, z_0) \in (0, +\infty)^3$ solution de :

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Démonstration. On a en posant $(u, v, w) = (\ln(x), \ln(y), \ln(z))$:

$$\chi(x, y, z) = \sum_{s \in \mathcal{S}} e^{us_x} e^{vs_y} e^{ws_z} = \frac{1}{C} \mathbb{E} \left[e^{\langle Y, (u, v, w)^T \rangle} \right],$$

où Y est une variable aléatoire de saut i.e. Y suit une loi uniforme sur \mathcal{S} et C est une constante de renormalisation. On pose donc

$$\tilde{\chi} : (u, v, w) \mapsto \frac{1}{C} \mathbb{E} \left[e^{\langle Y, (u, v, w)^T \rangle} \right] = \chi(e^u, e^v, e^w).$$

$\tilde{\chi}$ est strictement convexe en tant que transformée de Laplace du vecteur aléatoire Y . De plus, elle est coercive (il suffit de regarder l'un des termes $s \in \mathcal{S}$ pour lesquels $s_x = 1$ et de prendre $(u, 0, 0)$ avec $u \rightarrow +\infty$). Par conséquent, elle admet un unique (u_0, v_0, w_0) solution de :

$$\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial u} = \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial v} = \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial w} = 0.$$

Or :

$$\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial u}(u, v, w) = e^u \frac{\partial \chi}{\partial x}(e^u, e^v, e^w).$$

On a ainsi :

$$\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial u}(u, v, w) = 0 \iff \frac{\partial \chi}{\partial x}(e^u, e^v, e^w) = 0.$$

En faisant de même pour les autres coordonnées, on obtient que l'équation (7) admet une unique solution donnée par $(x_0, y_0, z_0) = (e^{u_0}, e^{v_0}, e^{w_0})$. \square

On pose alors les quantités :

$$a = \frac{\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}}{\sqrt{\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}}}(x_0, y_0, z_0), \quad b = \frac{\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}}{\sqrt{\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}}}(x_0, y_0, z_0), \quad c = \frac{\frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z}}{\sqrt{\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}}}(x_0, y_0, z_0).$$

Puis on considère la matrice :

$$\text{cov} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère alors Z une racine carrée de cov c'est à dire : $\text{cov} = ZZ^\top$ puis on pose enfin le triangle sphérique associé à la marche aléatoire :

$$T = (Z^{-1}(\mathbb{R}_+)^3) \cap \mathbb{S}^2.$$

Ici on peut se demander si la définition de T dépend de la racine de cov choisie. Si on prend deux racines Z_1 et Z_2 de sorte que $\text{cov} = Z_1 Z_1^\top = Z_2 Z_2^\top$. On a alors $Z_1 = Z_2 (Z_1^{-1} Z_2)^\top$. Or $(Z_1^{-1} Z_2)^\top$ est orthogonale, par conséquent le triangle associé à Z_1 et celui associé à Z_2 sont isométriques. En particulier, ils ont les mêmes angles et ceux-ci caractérisent le triangle. On peut donc prendre n'importe quelle racine de cov . Pour plus de clarté sur le lien entre les quantités a, b et c et le triangle T énonçons la proposition suivante :

Proposition 8 [1, Lemma 4] (Admis)

Soit \mathcal{S} une marche aléatoire de polynôme caractéristique χ et soit a, b, c et T définis comme ci-dessus. Alors les angles α, β, γ du triangle T sont donnés par :

$$\alpha = \arccos(-a), \quad \beta = \arccos(-b), \quad \gamma = \arccos(-c).$$

La preuve est similaire à celle de la dimension 2 qui sera faite dans la Section 5. On considère une racine issue de la décomposition de Cholesky puis on détermine les vecteurs directeurs de $L^{-1} \mathbb{R}^3$. Après ça la preuve se termine par un calcul long et fastidieux, qu'on choisira de ne pas présenter ici.

Exemple 3 On reprend l'exemple précédent, on a :

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

D'où $x_0 = 1$, par symétrie on trouve $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$. Ensuite, les dérivées croisées de χ sont toutes nulles d'où $a = b = c = 0$. Les angles de T sont donc donnés par $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$.

4.2 Propriétés asymptotiques

On veut maintenant énoncer des propriétés asymptotiques sur ces marches aléatoires. Pour cela, introduisons d'abord quelques outils utiles. On notera $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur \mathbb{S}^2 celui-ci est à voir comme le laplacien mais défini sur la sphère. On choisira ici de ne pas entrer dans les détails concernant cet opérateur.

Soit \mathcal{S} une marche aléatoire et T son triangle sphérique. On définit λ_1 comme la plus petite valeur propre Λ de $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ associée au problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{S}^2} m = -\Lambda m & \text{sur } T \\ m = 0 & \text{sur } \partial T \end{cases}, \quad (8)$$

pour m définie sur \mathbb{S}^2 . Ensuite on définit :

$$p = \sqrt{\lambda_1 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}. \quad (9)$$

On commence par regarder l'asymptotique du temps de sortie du cône $K = \mathbb{N}^3$. Si on note $(X(n))_{n \in \mathbb{N}}$ la marche aléatoire d'espace des sauts \mathcal{S} et pour $x \in \mathbb{N}^3$ on pose $\tau_x = \inf\{n \geq 0, \quad x + S(n) \notin \mathbb{N}^3\}$ le temps de sortie de \mathbb{N}^3 partant de x . On a alors le théorème suivant.

Théorème 6 [3, Theorem 1](Admis)

Soit $(X(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire d'espace des sauts \mathcal{S} et p défini par (9). Alors lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a :

$$\mathbb{P}(\tau_x > n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \kappa V(x) n^{-\frac{p}{2}},$$

où κ est une constante et $V(x)$ ne dépend que du point x .

Ce théorème nous donne entre autre un critère pour déterminer si l'espérance de τ_x est finie ou non. On peut notamment voir que pour $\lambda \geq 6$ on aura $\mathbb{E}[\tau_x] = +\infty$. Il est bon de remarquer qu'en réalité ce théorème est énoncé pour une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d et \mathbb{N}^3 est remplacé par un cône quelconque de \mathbb{Z}^d .

On peut ensuite énoncer un autre théorème qui cette fois nous donne le nombre de chemins de longueur n allant d'un point A à un point B suffisamment éloignés du bord de \mathbb{N}^3 pour une marche aléatoire apériodique.

Théorème 7 [3][1](Admis)

Soit $(X(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire d'espace des sauts \mathcal{S} et p par (9). Soit A et B deux points suffisamment éloignés du bord de \mathbb{N}^3 . Alors, si on note $o_{A \rightarrow B}(n)$ le nombre de chemins reliant A à B et de longueur n on a :

$$o_{A \rightarrow B}(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \kappa(A, B) \rho^n n^{-(p+\frac{3}{2})} (1 + o(1)),$$

où $\kappa(A, B)$ est une constante et $\rho = \min_{(0, +\infty)^3} \chi$.

On voit donc à travers ces théorèmes que λ_1 revêt une importance particulière puisqu'il nous permet de déterminer des propriétés asymptotiques des marches aléatoires. Cependant on ne peut souvent pas calculer λ_1 explicitement, néanmoins dans le cas où le triangle T a pour angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \gamma$ alors on a la proposition.

Proposition 9 [12, eq. (36)](Admise)

Soit T un triangle sphérique ayant pour angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \gamma$, alors la plus petite valeur propre associée au problème de Dirichlet (8) est donnée par :

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\pi}{\gamma} + 2 \right).$$

4.3 Classification des marches aléatoires

Le principal résultat de [1] concerne la classification des marches aléatoires à groupe fini. Avant d'énoncer ce résultat, on commence par définir deux classes particulières de marche à 3D. On commence par regarder les modèles de Hadamard qui sont divisés en deux groupes.

4.3.1 Modèle de Hadamard (1,2)

On dit que la marche aléatoire d'espace des sauts \mathcal{S} est un modèle de Hadamard (1, 2) si son polynôme caractéristique peut s'écrire sous la forme :

$$\chi(x, y, z) = U(x) + V(x)W(y, z).$$

Ici on peut voir U et V comme les polynômes caractéristiques d'une marche aléatoire à 1D et W comme celui d'une marche aléatoire à 2D. On peut alors énoncer la proposition suivante :

Proposition 10 [1, Lemma 5]

Soit \mathcal{S} une marche aléatoire de polynôme caractéristique $\chi(x, y, z) = U(x) + V(x)W(y, z)$. Soit (x_0, y_0, z_0) solution de (7). Alors sa matrice de covariance s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } c = \frac{\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}}{\sqrt{\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}}}(y_0, z_0).$$

Les angles du triangle T associé à \mathcal{S} sont alors donnés par $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ et $\gamma = \arccos(-c)$.

Démonstration. On commence par se donner (x_0, y_0, z_0) solution de (7). On a :

$$0 = \frac{\partial \chi}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = V(x_0) \frac{\partial W}{\partial y}(y_0, z_0).$$

Or comme $(x_0, y_0, z_0) \in (0, +\infty)^3$, $V(x_0)$ est forcément strictement positive, d'où $\partial_y W(y_0, z_0) = 0$. En faisant de même on obtient $\partial_z W(y_0, z_0) = 0$. On a de plus :

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) = V'(x_0) \frac{\partial W}{\partial y}(x_0, y_0, z_0).$$

Ainsi, comme $\partial_y W(y_0, z_0) = \partial_z W(y_0, z_0) = 0$, on obtient $a = b = 0$ dans cov et :

$$c = \frac{\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}}{\sqrt{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}}}(y_0, z_0).$$

On déduit les angles à partir de la Proposition 8. □

Comme énoncé dans la Proposition 9, on a :

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{\arccos(-c)} + 1 \right) \left(\frac{\pi}{\arccos(-c)} + 2 \right).$$

Les modèles de Hadamard (1,2) sont donc très intéressants puisqu'il s'agit d'une classe de marche aléatoires suffisamment large mais pour laquelle on peut calculer λ_1 explicitement et donc déduire l'asymptotique de la marche aléatoire.

4.3.2 Modèle de Hadamard (2,1)

On regarde ici une autre classe de modèle de Hadamard où on passe encore d'un modèle 3D à plusieurs modèles 1D et 2D. Soit \mathcal{S} une marche aléatoire de polynôme caractéristique χ . On dit que \mathcal{S} est un modèle de Hadamard (2,1) si :

$$\chi(x, y, z) = U(x, y) + V(x, y)W(z).$$

De la même manière que précédemment, U et V peuvent être vus comme polynôme caractéristique de marche à 2D et W comme celui d'une marche à 1D. On a alors une proposition similaire à la précédente.

Proposition 11 [1, Lemma 9]

Soit \mathcal{S} une marche aléatoire de polynôme caractéristique $\chi(x, y, z) = U(x, y) + V(x, y)W(z)$. Soit (x_0, y_0, z_0) solution que (7). Alors sa matrice de covariance s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } a = \frac{\frac{\partial^2 \chi|_{z_0}}{\partial x \partial y}}{\sqrt{\frac{\partial^2 \chi|_{z_0}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \chi|_{z_0}}{\partial y^2}}}(x_0, y_0).$$

Avec $\chi|_{z_0}(x, y) = \chi(x, y, z_0)$. De plus les angles du triangle T sont donnés par $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ et $\alpha = \arccos(-a)$.

Démonstration. Soit (x_0, y_0, z_0) solution de (7). On a :

$$\partial_z \chi(x_0, y_0, z_0) = V(x_0, y_0)W'(z_0) = 0,$$

d'où comme $V(x_0, y_0) > 0$, $W'(z_0) = 0$. On a ainsi :

$$\partial_x \partial_z \chi(x_0, y_0, z_0) = \partial_x V(x_0, y_0)W'(z_0) = 0$$

et :

$$\partial_y \partial_z \chi(x_0, y_0, z_0) = \partial_y V(x_0, y_0)W'(z_0) = 0.$$

Donc $b = c = 0$. De plus, on a pour tout $x, y \in (0, +\infty)$:

$$\partial_x \partial_y \chi(x, y, z_0) = \partial_x \partial_y \chi|_{z_0}(x, y).$$

D'où l'expression de a . □

Encore une fois ce modèle est intéressant puisqu'on se retrouve dans le cas où deux des angles de T valent $\frac{\pi}{2}$ et on peut donc calculer λ_1 qui s'exprime sous la forme :

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{\arccos(-a)} + 1 \right) \left(\frac{\pi}{\arccos(-a)} + 2 \right).$$

4.3.3 Théorème de classification des marches aléatoires

Avec tout ce qui a été vu précédemment on va vouloir classer les marches aléatoires vérifiant l'hypothèse **H 1** suivant leur groupe (s'il est fini ou infini, à quel groupe il est isomorphe), s'il est de Hadamard ou non, suivant les angles du triangle T et enfin suivant la valeur propre λ_1 . On peut alors énoncer un théorème dans le cas des marches aléatoires ayant un groupe fini.

Théorème 8 [1, Theorem 13](Admis)

Sous l'hypothèse **H1**, pour les marches aléatoires de groupe fini il y a exactement 17 triangles différents possibles.

On peut alors répertorier tous les triangles dans le tableau présenté dans [1, Table 3]. Un des faits intéressants que l'on peut observer dans ce tableau est que a priori on peut très bien avoir deux triangles différents qui ont la même valeur propre λ_1 , or ici chaque triangle a une valeur propre différente et est donc caractérisé par celle-ci.

	λ_1	p	Nb tri.	Angles	Hadamard	$ G $	G
1	4.261735	1.624084	2	$\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$	non	48	$\mathbb{Z}_2 \times S_4$
2	5.159146	1.825757	7	$\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$	non	24	S_4
3	6.241748	2.047890	2	$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]$	non	48	$\mathbb{Z}_2 \times S_4$
4	6.777108	2.150869	5	$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$	non	24	S_4
5	70/9	7/3	41	$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$	oui	16	$\mathbb{Z}_2 \times D_8$
6	35/4	5/2	279	$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$	oui/non	12	D_{12}
7	12	3	1852	$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	oui	8	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
8	12.400051	3.056691	2	$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$	non	48	$\mathbb{Z}_2 \times S_4$
9	13.74435	3.240902	7	$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$	non	24	S_4
10	20	4	172	$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	oui/non	12	D_{12}
11	20.571964	4.063109	2	$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$	non	48	$\mathbb{Z}_2 \times S_4$
12	21.309407	4.14321	7	$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$	non	24	S_4
13	24.456910	4.470604	2	$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]$	non	48	$\mathbb{Z}_2 \times S_4$
14	30	5	41	$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	oui	16	$\mathbb{Z}_2 \times D_8$
15	42	6	5	$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$	non	24	S_4
16	49.109942	6, 5256631	2	$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$	non	48	$\mathbb{Z}_2 \times S_4$
17	90	9	2	$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$	non	48	$\mathbb{Z}_2 \times S_4$

TABLE 1 – Classification des différents triangles pour les marches aléatoires satisfaisant l’hypothèse **H1** et de groupe fini.

5 Retour aux marches aléatoires de proie et prédateurs

Dans toute cette section, on fait le lien entre les sections 3 et 4, en effet on va chercher à redémontrer des théorèmes ou propositions sur les proies et prédateurs à l'aide de tous les outils introduits dans la section 4. Il s'agit ici de mes résultats que j'ai trouvé durant mon stage.

5.1 Un premier théorème

On revient comme dans la section précédente au cas de la Proposition 6 où on se place dans \mathbb{Z} et où on a 3 prédateurs $X_1(t), X_2(t), X_3(t)$ et une proie $Y(t)$ suivant chacun une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} de taux 1 et tous se déplaçant indépendamment. On a aussi que les positions initiales vérifient $x_k < y$ pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$. On note $\bar{U}(t) = Y(t) - X_1(t)$, $\bar{V}(t) = Y(t) - X_2(t)$, $\bar{W}(t) = Y(t) - X_3(t)$ et $(U_n)_{n \geq 0}$, $(V_n)_{n \geq 0}$, $(W_n)_{n \geq 0}$ leurs chaînes incluses respectives. On pose ensuite :

$$\tilde{T} = \inf\{n \in \mathbb{N}, U_n = 0 \text{ ou } V_n = 0 \text{ ou } W_n = 0\}.$$

Cela correspond au temps de capture mais cette fois pour la chaîne incluse. Remarquons par ailleurs que si on note :

$$T = \inf\{t \geq 0, \bar{U}(t) = 0 \text{ ou } \bar{V}(t) = 0 \text{ ou } \bar{W}(t) = 0\},$$

on a : $N(T) = \tilde{T}$ où $N(t)$ est le nombre de sauts du processus $(U(t), V(t), W(t))_{t \geq 0}$ et suit une loi de poisson $\mathcal{P}(1)$. On peut alors énoncer une proposition un peu plus générale qui fait le lien entre $\mathbb{E}[\tilde{T}]$ et $\mathbb{E}[T]$.

Proposition 12

Soit $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i$ une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d , où $(N(t))_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de taux λ et où les ξ_i sont i.i.d et représentent les sauts. Soit $K \subset \mathbb{Z}^d$. On note Y_n la chaîne incluse de $X(t)$ et

$$T = \inf\{t \geq 0, X(t) \in K\}, \quad \tilde{T} = \inf\{n \geq 0, Y_n \in K\}.$$

Alors :

$$\mathbb{E}[\tilde{T}] = \lambda \mathbb{E}[T].$$

Démonstration. Commençons par remarquer que $\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(\tilde{T} > N(t))$. En effet :

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(\forall s \leq t, X(s) \notin K) = \mathbb{P}(\forall n \leq N(t), Y_n \notin K) = \mathbb{P}(\tilde{T} > N(t)).$$

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > t) dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\tilde{T} > N(t)) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\tilde{T} > n, N(t) = n) \right) dt. \end{aligned}$$

Or, \tilde{T} ne dépend que de $(Y_n)_{n \geq 0}$ qui ne dépend que des ξ_i mais les ξ_i sont indépendants de $(N(t))_{t \geq 0}$ d'où \tilde{T} et $N(t)$ sont indépendants. On a alors, par indépendance puis par Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\tilde{T} > n) \mathbb{P}(N(t) = n) \right) dt \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\tilde{T} > n) \mathbb{P}(N(t) = n) dt \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\tilde{T} > n) \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dt \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\tilde{T} > n) \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[\tilde{T}]. \end{aligned}$$

□

On peut donc démontrer le Théorème 6 mais en regardant uniquement la chaîne incluse (U_n, V_n, W_n) puisqu'on se retrouve bien dans le cas d'une marche aléatoire à 3D. Pour regarder la loi de (U_n, V_n, W_n) , on regarde d'abord les mouvements de $(\bar{U}(t), \bar{V}(t), \bar{W}(t))$, ceux-ci sont donnés par :

$(\Delta\bar{U}, \Delta\bar{V}, \Delta\bar{W})$	au taux
$(\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow)$	$\frac{1}{2}$
$(\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow)$	$\frac{1}{2}$
$(\rightarrow, \quad, \quad)$	$\frac{1}{2}$
$(\leftarrow, \quad, \quad)$	$\frac{1}{2}$
$(\quad, \rightarrow, \quad)$	$\frac{1}{2}$
$(\quad, \leftarrow, \quad)$	$\frac{1}{2}$
$(\quad, \quad, \rightarrow)$	$\frac{1}{2}$
$(\quad, \quad, \leftarrow)$	$\frac{1}{2}$

Comme chaque mouvement est au même taux, chaque saut est équiprobable et donc la chaîne incluse suit une marche aléatoire à 3D d'espace des sauts :

$$\mathcal{S} = \{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1), (-1, -1, -1), (1, 1, 1)\}.$$

On peut représenter graphiquement cette marche aléatoire pour plus de clarté.

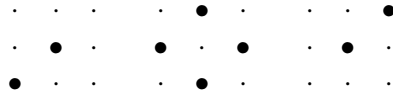


FIGURE 1 – Représentation en coupe de l'espace des sauts \mathcal{S} selon la représentation [1, Fig. 4]. On représente ici les coupes $z = -1, z = 0$ et $z = 1$ où chaque point représente une coordonnée de $\{-1, 0, 1\}^3$ et un point épais représente la coordonnée d'un saut possible.

Son polynôme caractéristique est :

$$\chi(x, y, z) = x + \bar{x} + y + \bar{y} + z + \bar{z} + xyz + \overline{xyz}.$$

On veut chercher les solutions de (7). On a :

$$\partial_x \chi(x, y, z) = -\frac{1}{x^2} + 1 + yz - \frac{1}{x^2 yz}, \quad \partial_y \chi(x, y, z) = -\frac{1}{y^2} + 1 + xz - \frac{1}{y^2 xz}, \quad \partial_z \chi(x, y, z) = -\frac{1}{z^2} + 1 + xy - \frac{1}{z^2 xy}.$$

On peut énoncer une proposition plus générale concernant les marches aléatoires sans drift, néanmoins on ne s'en servira que dans le cas $d = 2$ et $d = 3$.

Proposition 13

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d , \mathcal{S} son espace des sauts et χ son polynôme caractéristique. On suppose que la marche aléatoire satisfait l'hypothèse **H1** et est sans drift, c'est à dire que :

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} s = 0.$$

Alors, l'unique solution de :

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial \chi}{\partial x_d} = 0$$

est donnée par $(1, \dots, 1)$.

Démonstration. Soit \mathcal{S} un espace des sauts associé à une marche aléatoire sans drift. Pour $s \in \mathcal{S}$, on note $s = (s_1, \dots, s_d)$. On a alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \quad \sum_{s \in \mathcal{S}} s_i = 0.$$

En particulier, comme pour tout i , pour tout $s \in \mathcal{S}$, $s_i \in \{\pm 1, 0\}$, on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \quad \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_i = -1}} 1 = \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_i = 1}} 1.$$

Ensuite, pour χ le polynôme caractéristique associé à \mathcal{S} , χ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\chi(x_1, \dots, x_d) = \overline{x_1} A_-(x_2, \dots, x_d) + A_0(x_2, \dots, x_d) + x_1 A_+(x_2, \dots, x_d).$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_d) = -\frac{1}{x_1^2} A_-(x_2, \dots, x_d) + A_+(x_2, \dots, x_d).$$

Ainsi,

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_1}(1, \dots, 1) = -A_-(1, \dots, 1) + A_+(1, \dots, 1).$$

Or, remarquons que :

$$A_-(x_2, \dots, x_d) = \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_1 = -1}} x_2^{s_2} \cdots x_d^{s_d}, \quad A_+(x_2, \dots, x_d) = \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_1 = 1}} x_2^{s_2} \cdots x_d^{s_d}.$$

Ainsi,

$$A_-(1, \dots, 1) = \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_1 = -1}} 1, \quad A_+(1, \dots, 1) = \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_1 = 1}} 1.$$

Donc $A_-(1, \dots, 1) = A_+(1, \dots, 1)$ et donc $\frac{\partial \chi}{\partial x_1}(1, \dots, 1) = 0$. En faisant de même pour les dérivées par rapport aux autres coordonnées on trouve que $(1, \dots, 1)$ est (l'unique) solution de :

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial \chi}{\partial x_d} = 0.$$

□

Remarquons que cette proposition peut être généralisée au cas où chaque saut n'est plus équiprobable. Ici si on note a_s la probabilité de faire le saut s et que $\sum_{s \in \mathcal{S}} a_s s = 0$ alors $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$.

Ici, la marche aléatoire étant sans drift, on trouve donc $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$. Puis on obtient pour a, b et c définis précédemment : $a = b = c = \frac{1}{2}$ d'où les angles du triangle T sont donnés par $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2\pi}{3}$. Une fois le triangle connu, on peut se référer directement au Tableau 1 pour déterminer la valeur de λ_1 .

Regardons d'abord le groupe G associé à la marche aléatoire. On a déjà :

$$\phi(x, y, z) = (\overline{xyz}, y, z), \quad \psi(x, y, z) = (x, \overline{xyz}, z), \quad \tau(x, y, z) = (x, y, \overline{xyz}).$$

On peut remarquer que ϕ, ψ et τ sont d'ordre 2, de plus ils ne commutent pas entre eux d'où G n'est pas abélien. Ainsi, on fait l'association avec les éléments de S_4 :

$$\phi \leftrightarrow (1, 2)$$

$$\psi \leftrightarrow (1, 3)$$

$$\tau \leftrightarrow (1, 4).$$

Comme $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ engendre S_4 , on peut donc exhiber un isomorphisme $G = \langle \phi, \psi, \tau \rangle \simeq S_4$, en particulier G est fini. On se retrouve ainsi dans la ligne 2 du Tableau 1. On obtient alors $\lambda_1 = 5.159, 145$ et donc $p = 1.825, 756$ on trouve donc $\frac{p}{2} < 1$. De plus ici, on peut appliquer l'asymptotique (6) puisque \tilde{T} correspond au temps de sortie de \mathbb{N}^3 . Comme $\frac{p}{2} < 1$, on obtient que $\mathbb{E}[\tilde{T}] = +\infty$ et donc $\mathbb{E}[T] = +\infty$, on retrouve ainsi le résultat de la Proposition 6 avec une démonstration différente.

5.2 Un cas particulier en dimension 2

Pour continuer à faire le lien entre les deux parties du rapport, on reprend le mouvement (2). Si on pose $L(t) = X_1(t) - Y(t)$, $R(t) = X_2(t) - Y(t)$, et qu'on regarde $((U_n, V_n))_{n \geq 0}$ la chaîne incluse associée à $(L(t), R(t))$, les sauts de (U_n, V_n) sont donnés par $\mathcal{S} = \{(1, -1), (-1, 1), (1, 1), (-1, -1), (\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$. Or ici, chaque saut n'est pas équiprobable, ainsi à chaque saut $s \in \mathcal{S}$ on peut associer sa probabilité a_s . On généralise alors le polynôme caractéristique associé à la marche aléatoire (U_n, V_n) de la façon suivante :

$$\chi(x, y) = \sum_{s \in \mathcal{S}} a_s x^{s_x} y^{s_y}.$$

Ici on a donc :

$$\chi(x, y) = \frac{\alpha + 1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}) + \frac{\beta}{2}(xy + \bar{x}\bar{y}) + \frac{1 - \alpha - \beta}{2}(x + \bar{x} + y + \bar{y}).$$

Il est bon de remarquer que normalement il devrait y avoir un facteur $\frac{1}{3 - \alpha - \beta}$ devant les termes de χ , cependant ici le fait de multiplier χ par une constante n'a aucune influence sur les résultats qui suivent, on se permettra donc d'omettre ce facteur. On peut alors reprendre tout ce qui avait été énoncé précédemment avec ce nouveau χ . Commençons d'abord par expliciter la façon de procéder en dimension 2 qui est similaire à la dimension 3. On cherche d'abord (x_0, y_0) (l'unique) solution de :

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0.$$

Ensuite on considère la matrice de covariance :

$$\text{cov} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \text{ où } a = \frac{\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}}{\sqrt{\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}}}.$$

Celle-ci présente les mêmes propriétés que la matrice de covariance dans le cas $d = 3$. On considère ensuite une racine carrée de cov : $\text{cov} = ZZ^T$ puis on s'intéresse à l'arc de cercle : $\mathcal{C} = (Z^{-1}(\mathbb{R}_+)^2) \cap \mathbb{S}^1$. Celui-ci est caractérisé par son angle γ . On a alors le même lien entre les coefficients de cov et l'angle de l'arc de cercle.

Proposition 14

Soit \mathcal{S} une marche aléatoire de dimension 2 de matrice de covariance :

$$\text{cov} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors l'angle γ de l'arc de cercle \mathcal{C} associé à la marche aléatoire est donné par :

$$\gamma = \arccos(-a).$$

Démonstration. Commençons par considérer une racine de cov , on peut prendre :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & \sqrt{1 - a^2} \end{pmatrix}.$$

Son inverse est donné par :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{-a}{\sqrt{1 - a^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \end{pmatrix}.$$

L'arc de cercle \mathcal{C} a alors pour extrémités les vecteurs :

$$x = \frac{L^{-1}e_1}{\|L^{-1}e_1\|}, \quad y = \frac{L^{-1}e_2}{\|L^{-1}e_2\|},$$

où e_1, e_2 sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 . On trouve :

$$x = \begin{pmatrix} \sqrt{1-a^2} \\ -a \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'angle de l'arc de cercle est alors l'angle entre x et y , comme x et y sont de norme 1, on a :

$$\gamma = \arccos(\langle x, y \rangle) = \arccos(-a).$$

□

Enfin, on s'intéresse au problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{S}^1} m &= \Lambda m & \text{sur } \mathcal{C} \\ m &= 0 & \text{sur } \partial\mathcal{C} \end{cases}.$$

Les valeurs propres de $\Delta_{\mathbb{S}^1}$ sont alors les $k^2 \frac{\pi^2}{\gamma^2}$ où $k \in \mathbb{N}^*$. En effet, sur \mathbb{S}^1 les fonctions ne dépendent que de l'angle θ qui parcourt le cercle dans le sens anti-trigonométrique. L'opérateur de Laplace est alors défini par $\Delta_{\mathbb{S}^1} m = \frac{\partial^2 m}{\partial \theta^2}$. Si on considère que l'angle θ parcourt le cercle en partant de e_2 , le problème de Dirichlet devient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 m}{\partial \theta^2} &= -\Lambda m & \text{sur } \mathcal{C} \\ m(0) &= 0 \\ m(\gamma) &= 0 \end{cases}.$$

Soit λ une valeur propre liée à ce problème de Dirichlet et m un vecteur propre associé à λ , on peut voir qu'on a nécessairement $\lambda > 0$ en détaillant le cas $\lambda \geq 0$.

Les vecteurs propres m sont alors de la forme :

$$m(\theta) = Ae^{i\sqrt{\lambda}\theta} + Be^{-i\sqrt{\lambda}\theta}.$$

Or $m(0) = 0$ d'où $B = -A$, de plus $m(\gamma) = 0$ d'où $A(e^{i\sqrt{\lambda}\gamma} - e^{-i\sqrt{\lambda}\gamma}) = 0$. Mais comme $m \neq 0$, on a nécessairement $\sin(\sqrt{\lambda}\gamma) = 0$ d'où $\lambda = \frac{k^2 \pi^2}{\gamma^2}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, la plus petite valeur propre est donc donnée par $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{\gamma^2}$. Dans le cas de l'arc de cercle lié à la matrice de covariance, on a donc $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{\arccos(-a)^2}$.

Revenons au cas de la marche aléatoire explicitée plus tôt, on peut remarquer qu'on a :

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} a_s s = 0.$$

On peut alors démontrer, de la même manière que la Proposition 13 que l'unique solution (x_0, y_0) de $\partial_x \chi = \partial_y \chi = 0$ est donnée par $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Ensuite, on a :

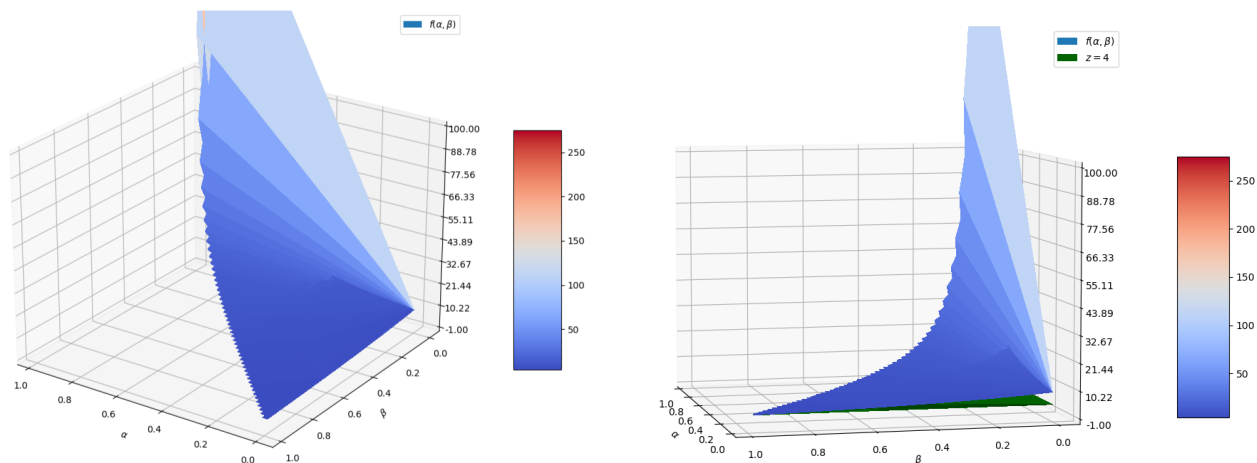
$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 1 + \alpha - \beta, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}(x_0, y_0) = 2, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 2.$$

D'où : $a = \frac{1+\alpha-\beta}{2}$ et ainsi :

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{\arccos\left(\frac{1+\alpha-\beta}{2}\right)^2}.$$

Contrairement à la dimension 3, on dispose donc ici d'une formule explicite pour λ_1 en fonction des α et β choisis. On peut donc représenter directement la fonction :

$$f : \begin{cases} \{(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2, \alpha + \beta \leq 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \frac{\pi^2}{\arccos\left(\frac{1+\alpha-\beta}{2}\right)^2} \end{cases}.$$



(a) Représentation graphique de $\lambda_1 = f(\alpha, \beta)$ pour $\alpha, \beta \in (0, 1), \alpha + \beta \leq 1$. (b) Représentation graphique de $\lambda_1 = f(\alpha, \beta)$ pour $\alpha, \beta \in (0, 1), \alpha + \beta \leq 1$ ainsi que du plan $z = 4$.

FIGURE 2 – Représentations graphiques de $\lambda_1 = f(\alpha, \beta)$.

On obtient la Figure 2a.

Si on reprend ce qui a été fait dans [3], on a toujours l'asymptotique :

$$\mathbb{P}(\tau_x > n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \kappa V(x) n^{-\frac{p}{2}},$$

avec cette fois $p = \sqrt{\lambda_1}$. On a donc $\mathbb{E}[T] < +\infty$ si et seulement si $\lambda_1 > 4$.

On peut observer graphiquement sur la Figure 2b que pour tout couple $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$ tel que $\alpha + \beta \leq 1$, on a : $\lambda_1 > 4$. En effet, si on considère la fonction $g(u) = \frac{\pi^2}{\arccos(u)^2}$ elle est strictement croissante sur $[0, 1)$ et on a $g(0) = 4$. De plus, $(\alpha, \beta) \mapsto \frac{1+\alpha-\beta}{2}$ est minimale en $(0, 1)$ et vaut 0, par conséquent $f(\alpha, \beta)$ est minimale en $(0, 1)$ et vaut. En conclusion on a que pour $\alpha = 0, \beta = 1$, $\lambda_1 = 4$ et pour tout $\alpha, \beta < 1$, $\lambda_1 > 4$.

Par conséquent, on trouve que $E[T] < +\infty$ sauf si $\beta = 1$. On retrouve ainsi le résultat du Théorème 2. Il y a cependant un cas que l'on a pas traité, c'est le cas $\alpha = 1, \beta = 0$. Dans ce cas la matrice de covariance est donnée par :

$$\text{cov} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme elle n'est pas inversible, on ne peut utiliser la méthode faisant intervenir l'arc de cercle \mathcal{C} . En fait, comme ici $\mathcal{S} = \{(-1, 1), (1, -1)\}$, on a $\mathcal{S} \subset \{u \in \mathbb{R}^2, \langle u, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \geq 0\}$, \mathcal{S} ne satisfait pas l'hypothèse **H1**. Cependant, on peut voir (quitte à effectuer une rotation de 45°) que la marche aléatoire correspond à la marche aléatoire sur \mathbb{Z} et que le temps de sortie T correspond au temps de sortie d'un intervalle borné qui est d'espérance finie, on a donc que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

6 Conclusion

Dans ce rapport, on a donc pu observer d'abord les marches aléatoires de proie et prédateurs. On s'est ensuite intéressé aux marches aléatoires discrètes confinées dans un cône puis enfin on a cherché à lier les deux sujets.

Pour poursuivre ce travail, il serait intéressant d'étendre ce qui a été fait dans la section 4 du rapport à la dimension 4. Il y a de nombreuses raisons qui font que ce serait facile de passer en dimension 4. Si on regarde ce qui a été fait, on remarque que le passage de la dimension 3 à 2 se fait aisément en considérant une coordonnée de moins pour χ et une matrice 2×2 au lieu d'une matrice 3×3 , enfin l'asymptotique (6) est énoncée dans [3] en dimension d quelconque, il n'y a donc aucun problème à

réutiliser cette asymptotique (en prenant garde à modifier p).
 Pour passer en dimension 4 on peut donc considérer $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\{\pm 1, 0\}^4)$ et :

$$\chi(x, y, z, t) = \sum_{s \in \mathcal{S}} x^{s_x} y^{s_y} z^{s_z} t^{s_t}.$$

Ensuite, on peut aisément construire une matrice cov $\in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$\text{cov} = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ a & 1 & d & e \\ b & d & 1 & f \\ c & e & f & 1 \end{pmatrix}$$

dont les coefficients a, b, c, d, e, f sont liés à la Hessienne de χ prise en (x_0, y_0, z_0, t_0) solution de $\partial_x \chi = \partial_y \chi = \partial_z \chi = \partial_t \chi = 0$ comme dans le cas à 3 dimensions. On considère alors L une racine de cov et on considère :

$$\mathcal{T} = (L^{-1}(\mathbb{R}_+)^4) \cap \mathbb{S}^3.$$

Une fois cet objet introduit, on peut remarquer qu'en dimension 2 et 3 les angles ρ , caractérisant l'arc de cercle ou le triangle sphérique, sont directement donnés à partir des coefficients non-diagonaux de la matrice par la relation $\rho = \arccos(-r)$ où r est l'un de ces coefficients.

On peut donc imaginer que ce "triangle sphérique" \mathcal{T} sera caractérisé par 6 "angles" donnés par :

$$\alpha = \arccos(-a), \beta = \arccos(-b), \gamma = \arccos(-c), \delta = \arccos(-d), \varepsilon = \arccos(-e), \varphi = \arccos(-f).$$

On a alors l'asymptotique :

$$\mathbb{P}(\tau_x > n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \kappa V(x) n^{-\frac{p}{2}},$$

avec cette fois $p = \sqrt{\lambda_1 + 1} - 1$ et λ_1 est une valeur propre du problème de Dirichlet pour l'opérateur $\Delta_{\mathbb{S}^3}$:

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{S}^3} m & = \Lambda m & \text{sur } \mathcal{T} \\ m & = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{T} \end{cases}.$$

Une fois tout cela introduit, on peut se demander les difficultés qui seraient liées à la dimension 4. Comme pour la dimension 3 il n'y a pas de formule explicite pour déterminer λ_1 dans le cas général, on est donc généralement obligé de le calculer numériquement et le passage à la dimension 4 n'est pas plus difficile de ce côté là. Une des premières difficultés concerne la compréhension de la sphère \mathbb{S}^3 . La principale difficulté ou du moins la majeure partie du travail à faire sur la dimension 4 concerne la classification. Il faudrait par exemple regarder s'il existe un équivalent aux modèles de Hadamard mais aussi s'intéresser au groupe G qui cette fois serait engendré par 4 éléments et enfin essayer d'énoncer une variante du Théorème 8.

Ensuite, au delà des applications plus générales que cela peut avoir, si on se limite aux marches aléatoires de proies et prédateurs on pourrait démontrer d'une autre manière le théorème suivant.

Théorème 9 [9, Theorem 1]

Soit $N = 4$ prédateurs $(X_1(t), X_2(t), X_3(t), X_4(t))$ et une proie $Y(t)$, tous suivant des marches aléatoires indépendantes de taux 1. Si on note T le temps de capture, on a $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

De plus, généraliser en dimension 4 permettrait notamment d'étudier le cas de 2 prédateurs et deux proies sur \mathbb{Z} . En effet, si on considère $X_1(t), X_2(t)$ deux prédateurs et $Y_1(t), Y_2(t)$ deux proies, on veut regarder $T = \inf\{t \geq 0, \exists i, j, X_i(t) = Y_j(t)\}$. On peut alors considérer $U_1(t) = X_1(t) - Y_1(t), V_1(t) = X_2(t) - Y_1(t), U_2(t) = X_1(t) - Y_2(t)$ et $V_2(t) = X_2(t) - Y_2(t)$. Le quadruplet $(U_1(t), V_1(t), U_2(t), V_2(t))$ va suivre une marche aléatoire d'espace des sauts \mathcal{S} et, quitte à changer le signe de certains processus, T va représenter le temps de sortie du cône \mathbb{N}^4 que l'on sait étudier.

A Annexe

A.1 Simulations numériques

Afin de pouvoir observer graphiquement les marches aléatoires des simulations numériques ont été faites. Commençons par détailler la façon dont on simule une marche aléatoire continue de taux λ . On commence d'abord par se donner un instant maximal T , dans les simulations on a pris $T = 1000$. On tire ensuite $N(T)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre λT , puis on utilise la proposition suivante pour obtenir les instants de sauts du processus $N(t)$.

Proposition 15 [10, Theorem 5.2]

Soit $N(t)$ un processus de Poisson. Sachant que $N(T) = k$, les instants de saut T_1, \dots, T_k ont pour loi la statistique d'ordre du k -uplet (U_1, \dots, U_k) où les U_i suivent une loi uniforme sur $[0, T]$.

On obtient ainsi numériquement une liste contenant les instants de sauts. Ensuite, on procède comme dans le cas discret en sommant jusqu'à $N(t)$ qui est connu.

Pour $N = 2$, il semble que numériquement on observe $P(T > t) \geq \frac{C}{t}$ où C est une constante (ici par exemple on peut prendre $C = 6$).

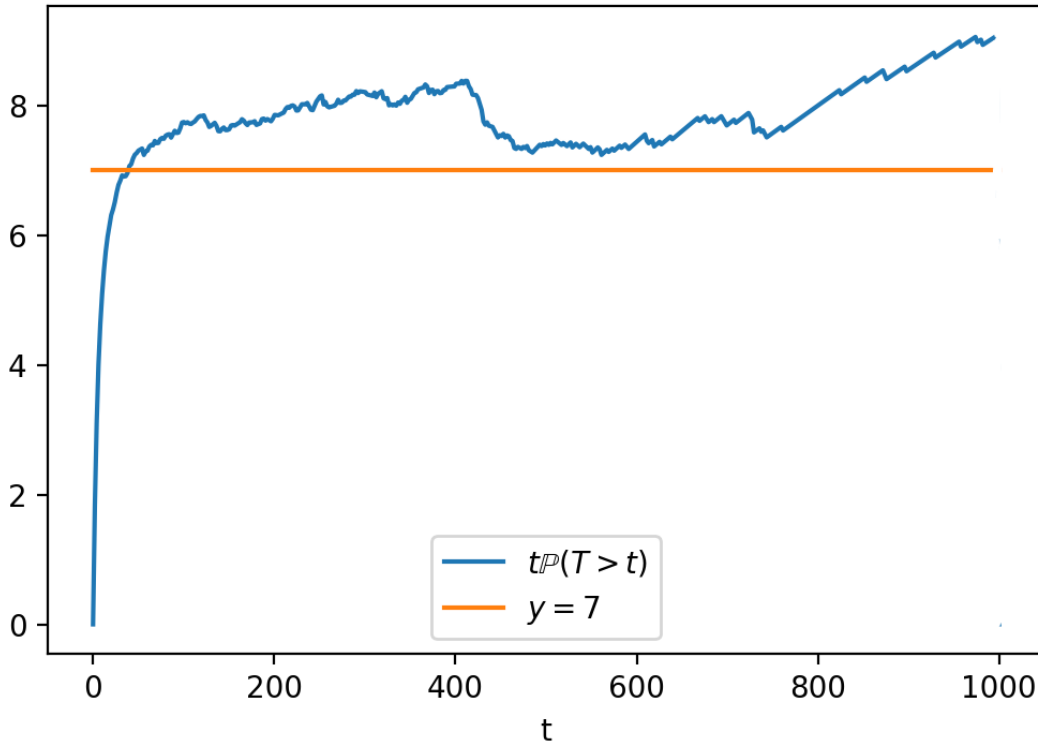


FIGURE 3 – Représentation graphique de $t\mathbb{P}(T > t)$ sur $[0, 1000]$ pour $N = 2$ prédateurs

Concernant les simulations numériques, on en a aussi utilisé pour observer des faits non démontrés. En effet, dans le rapport, on a utilisé les faits suivants :

- Si $X(t)$ est une marche aléatoire sur \mathbb{Z} de taux 1 et $T = \inf\{t > 0, X(t) = 0\}$ alors :

$$\mathbb{P}(T > t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

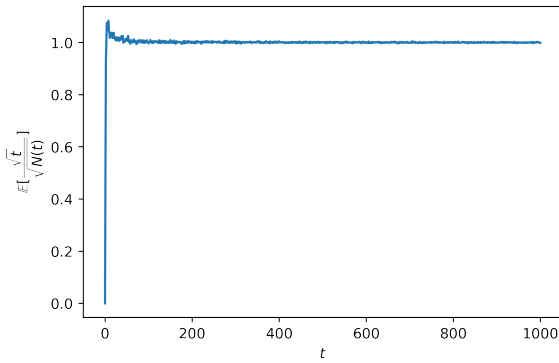
- Si $X(t)$ est une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^2 de taux 1 et $T = \inf\{t > 0, X(t) = 0\}$ alors :

$$\mathbb{P}(T > t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{\log(t)}.$$

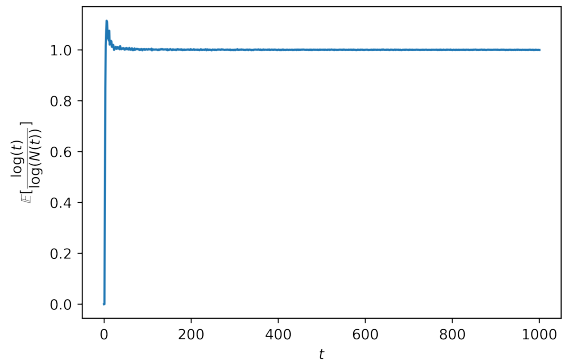
Ces deux propriétés sont directement dues à l'asymptotique de $\mathbb{P}(\tilde{T})$ et il semblerait que pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant suffisamment de propriétés (par exemple ici les fonctions $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto \log(t)$ sont strictement croissantes et concaves), on ait :

$$\mathbb{P}(\tilde{T} > n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f(n) \Rightarrow \mathbb{P}(T > t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} f(t).$$

Dans [2] cette propriété semble utilisée directement. Durant le stage, avec l'aide de mes tuteurs, j'ai essayé de démontrer cette propriété dans les cas où $f(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = \log(x)$ sans succès malheureusement. Néanmoins, le problème pouvait se ramener à démontrer que $\mathbb{E} \left[\frac{f(t)}{f(N(t))} \right] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ (quitte à conditionner sur $N(t)$ de sorte que $\frac{1}{N(t)}$ soit bien défini), bien que cela n'ait pas été réussi, on a néanmoins pu observer la convergence numériquement pour $\mathbb{E} \left[\frac{\log(t)}{\log(N(t))} \right]$ et $\mathbb{E} \left[\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{N(t)}} \right]$ à travers les figures 4b et 4a.



(a) Représentation graphique de $\mathbb{E} \left[\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{N(t)}} \right]$ simulé numériquement à partir de $N = 200$ variables aléatoires pour chaque instant t .



(b) Représentation graphique de $\mathbb{E} \left[\frac{\log(t)}{\log(N(t))} \right]$ simulé numériquement à partir de $N = 200$ variables aléatoires pour chaque instant t .

FIGURE 4 – Asymptotiques de $\mathbb{E} \left[\frac{f(t)}{f(N(t))} \right]$.

On a ici simulé dans chaque cas $N = 200$ variables aléatoires pour chaque instant t .

A.2 La matrice cov est définie positive

Dans la partie 2 du rapport on a utilisé le fait que la matrice cov était définie positive notamment pour inverser une racine carrée de cette matrice, de plus dans la démonstration de la Proposition 8 présentée dans [1] la racine carrée considérée est celle obtenue par décomposition de Cholesky d'où la nécessité d'avoir une matrice définie positive. Pour ça on va construire une matrice de covariance $\text{cov}(Y)$ où Y est un vecteur aléatoire.

$$\text{Hess}(\chi)(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

On considère une variable aléatoire Y à valeurs dans \mathcal{S} définie par :

$$\mathbb{P}(Y = s) = \frac{x_0^{s_x} y_0^{s_y} z_0^{s_z}}{\chi(x_0, y_0, z_0)}, \quad \forall s \in \mathcal{S}.$$

Si on considère les coordonnées Y_1, Y_2, Y_3 de Y de sorte que $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ alors on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_1] &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(Y = s) s_x = \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_x \neq 0}} \frac{x_0^{s_x} y_0^{s_y} z_0^{s_z}}{\chi(x_0, y_0, z_0)} s_x \\ &= - \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_x = -1}} \frac{1}{x_0} \frac{y_0^{s_y} z_0^{s_z}}{\chi(x_0, y_0, z_0)} + \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_x = 1}} x_0 \frac{y_0^{s_y} z_0^{s_z}}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \\ &= \frac{x_0}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial \chi}{\partial x}(x_0, y_0, z_0).\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_2] &= \frac{y_0}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial \chi}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \mathbb{E}[Y_3] &= \frac{z_0}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial \chi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0).\end{aligned}$$

Ici on a pris (x_0, y_0, z_0) quelconque, si on prend (x_0, y_0, z_0) solution de (7) on a alors :

$$\mathbb{E}[Y_1] = 0, \quad \mathbb{E}[Y_2] = 0, \quad \mathbb{E}[Y_3] = 0.$$

On va donc considérer la matrice de covariance $\text{cov}(Y)$, remarquons qu'on a d'abord :

$$0 = \frac{\partial \chi}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = - \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_x = -1}} \frac{1}{x_0^2} y_0^{s_y} z_0^{s_z} + \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_x = 1}} y_0^{s_y} z_0^{s_z},$$

d'où :

$$\frac{1}{x_0} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_x = -1}} y_0^{s_y} z_0^{s_z} = x_0 \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_x = 1}} y_0^{s_y} z_0^{s_z}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_1^2] &= \frac{1}{x_0} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_x = -1}} y_0^{s_y} z_0^{s_z} + x_0 \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_x = 1}} y_0^{s_y} z_0^{s_z} \\ &= 2 \frac{1}{x_0} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s_x = -1}} y_0^{s_y} z_0^{s_z} \\ &= \frac{x_0^2}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0).\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_2^2] &= \frac{y_0^2}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) \\ \mathbb{E}[Y_3^2] &= \frac{z_0^2}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0).\end{aligned}$$

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}\text{cov}(Y_1, Y_2) &= \frac{x_0 y_0}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \text{cov}(Y_1, Y_3) &= \frac{x_0 z_0}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \text{cov}(Y_2, Y_3) &= \frac{y_0 z_0}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0).\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de covariance de Y est donnée par :

$$\text{cov}(Y) = \begin{pmatrix} \frac{x_0^2}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) & \frac{x_0 y_0}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{x_0 z_0}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{x_0 y_0}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{y_0^2}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) & \frac{y_0 z_0}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{x_0 z_0}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0) & \frac{y_0 z_0}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0) & \frac{z_0^2}{\chi(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est donc semi définie positive en tant que matrice de covariance. Supposons par l'absurde

qu'elle ne soit pas définie positive, alors il existe $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $X^\top \text{cov}(Y) X = 0$.

Mais, $X^\top \text{cov}(Y) X = \text{Var}(xY_1 + yY_2 + zY_3)$ et $\mathbb{E}[xY_1 + yY_2 + zY_3] = 0$ d'où $\mathbb{E}[(xY_1 + yY_2 + zY_3)^2] = 0$ et par conséquent $xY_1 + yY_2 + zY_3 = 0$ p.s. . Ainsi $\exists N \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(N) = 0$ et $\forall \omega \in N^c$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot Y(\omega) = 0.$$

Or $Y(\omega) \in \mathcal{S}$ et par l'hypothèse **H1**, il existe $s \in \mathcal{S}$ tel que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot s < 0$, de plus par construction de Y , $\mathbb{P}(Y = s) > 0$ d'où $N^c \cap \{Y = s\} \neq \emptyset$, en prenant ω dans cet ensemble on obtient une absurdité. La matrice $\text{cov}(Y)$ est donc définie positive.

Ensuite, on peut voir que si on considère la matrice définie par :

$$A_{i,j} = \frac{\text{cov}(Y)_{i,j}}{\sqrt{\text{cov}(Y)_{i,i} \text{cov}(Y)_{j,j}}},$$

on a : $A = \text{cov}$. Enfin, comme $\text{cov}(Y)$ est symétrique définie positive, la matrice cov l'est aussi.

Références

- [1] B. BOGOSEL et al. « 3D positive lattice walks and spherical triangles ». In : Journal of Combinatorial Theory, 172 (2020), p. 105189. ISSN : 0097-3165. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2019.105189>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0097316519301700>.
- [2] Maury BRAMSON et David GRIFFEATH. « Capture Problems For Coupled Random Walks ». In : Random Walks, Brownian Motion, and Interacting Particle Systems. Sous la dir. de Rick DURRETT et Harry KESTEN. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1991, p. 153-188. ISBN : 978-1-4612-0459-6. DOI : 10.1007/978-1-4612-0459-6_7. URL : https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0459-6_7.
- [3] Denis DENISOV et Vitali WACHTEL. « Random walks in cones ». In : The Annals of Probability 43.3 (2015), p. 992-1044. DOI : 10.1214/13-AOP867. URL : <https://doi.org/10.1214/13-AOP867>.
- [4] A. DVORETZKY et P. ERDŐS. « Some Problems on Random Walk in Space ». In : Second Berkeley Symposium Jan. 1951, p. 353-367.
- [5] Arnaud GIRAND. Problème de la ruine du joueur. 2012. URL : http://math.webgirand.eu/pdf/dvp_agreg/ruine.pdf.
- [6] Christer O. KISELMAN. « Subharmonic Functions on Discrete Structures ». In : Harmonic Analysis, Signal Processing. Sous la dir. d'Irene SABADINI, Daniele C. STRUPPA et David F. WALNUT. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 2005, p. 67-80. ISBN : 978-0-8176-4416-1.
- [7] Sébastien LOUSTEAU. Chaînes de Markov et Processus markoviens de sauts. Applications aux files d'attente 2008–2009.
- [8] J. R. NORRIS. Markov Chains. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 1997. DOI : 10.1017/CB09780511810633.
- [9] Jesse RATZKIN et Andrejs TREIBERGS. « A Capture Problem in Brownian Motion and Eigenvalues of Spherical Domains ». In : Transactions of the American Mathematical Society 361.1 (2009), p. 391-405. ISSN : 00029947. URL : <http://www.jstor.org/stable/40302773> (visité le 22/06/2022).
- [10] Sheldon M. ROSS. Introduction to Probability Models. Tenth Edition. Academic Press, 2010. ISBN : 978-0-12-375686-2.
- [11] Frank SPITZER. Principles of Random Walk. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1964. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4229-9>.
- [12] H. WALDEN et R. B. KELLOGG. « Numerical determination of the fundamental eigenvalue for the Laplace operator on a spherical domain ». In : Journal of Engineering Mathematics 11.4 (oct. 1977), p. 299-318. ISSN : 1573-2703. DOI : 10.1007/BF01537090. URL : <https://doi.org/10.1007/BF01537090>.